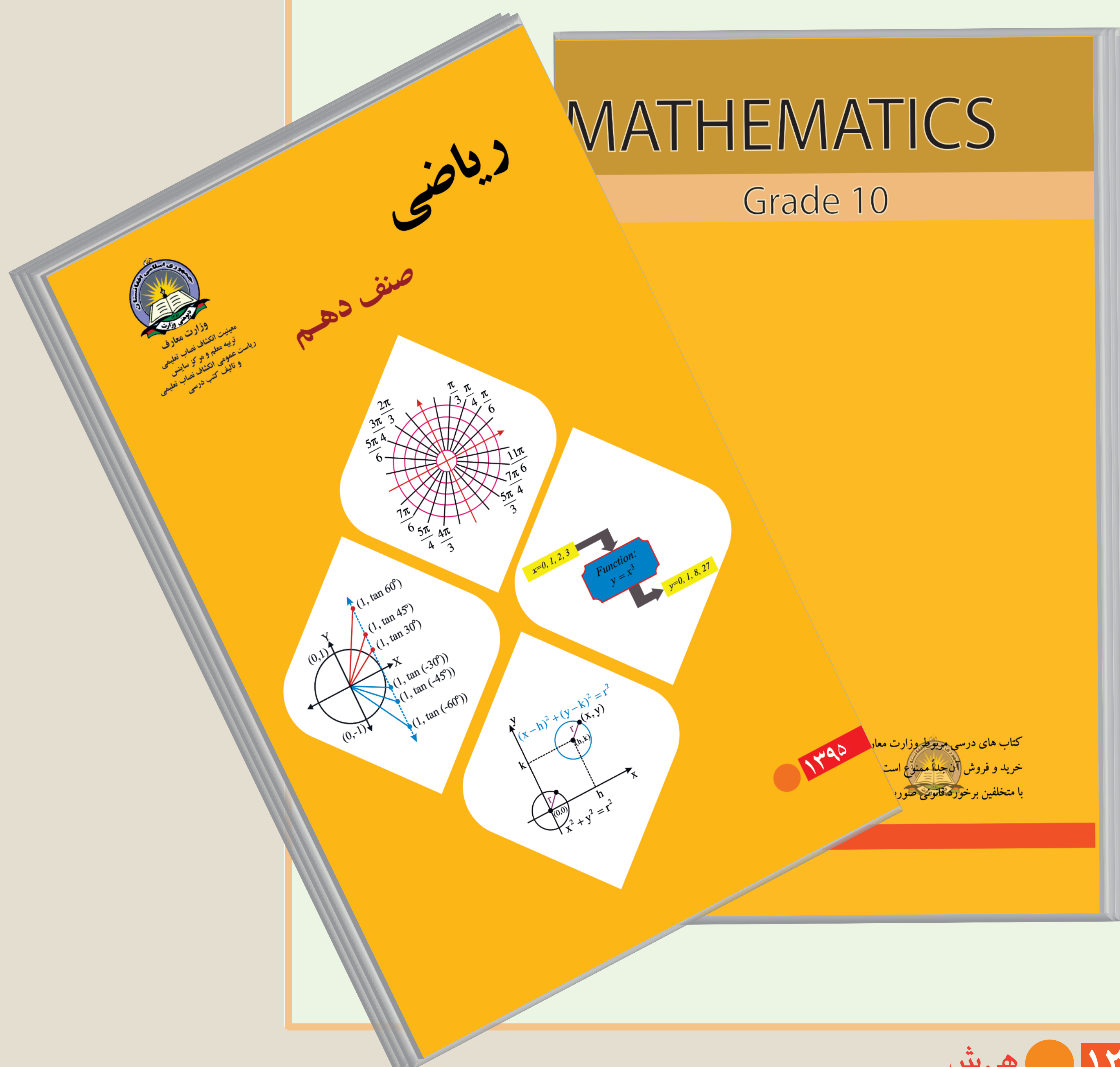
وزارت معارف

رهنمای معلم ریاضی

صنف ۱۰



۱۳۹۹ ه.ش



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلېږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم



وزارت معارف

رهنمای معلم ریاضی

صنف دهم

سال چاپ: ۱۳۹۹ هـ.ش

مشخصات کتاب

مضمون: رهنمای معلم ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی بخش دیپارتمنت ریاضی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف : دهم

زبان: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامهٔ وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۹ هجری شمسی

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادۀ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی و رهنمای تدریس در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، با استفاده از این رهنما، از هیچ نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندۀ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادۀ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این رهنمای تدریس مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

فهرست عناوین

معلم محترم!

کتاب رهنمای معلم ریاضی که به اساس روش آموزش فعال تألیف گردیده است صرف برای استفادهٔ شما بوده به دسترس شاگردان نباید قرار داده شود.

برای تدریس هرچه بهتر درس و آموزش شاگردان نکات زیر را مورد توجه قرار دهید:

۱) به مجرد داخل شدن به صنف بعد از گفتن السلام وعلیکم و گرفتن جواب(علیکم السلام) از طرف شاگردان، به اجرای فعالیت های مقدماتی چون(احوالپرسی، تنظیم صنف، گرفتن حاضری، ملاحظه کارخانه گی و ارزیابی درس گذشته و درصورت امکان درس جدید را با درس گذشته ارتباط داده به تدریس درس جدید اقدام نمایید.

۲) مواد ممد درسی(مواد محیطی) که در رهنما از آنها تذکر به عمل آمده رفته اند از قبل تهیه وبه صنف بیاورید.

۳) در این رهنما میتود هایی آموزش فعال به کار گرفته شده است که علاوه بر آنها میتواند از میتود های سود مندی که خود در طول تجربه وتدریس تان فراگرفته اید کار بگیرید.

۴) در این کتاب مراحل تدریس به شکل علمی آن درنظر گرفته شده است. اگر تطبیق آن مراحل، عملی شود به یقین که تدریس شما سود مند واقع می شود.

۵) در موضوعی که تدریس مینمایید تاحد امکان سعی به عمل آمده است تا برای هر درس، معلومات اضافی تهیه گردد که استفاده از آن در هنگام تدریس خالی از مفاد نیست.

۶) یک ساعت ۴۵ دقیقه یی طوری تقسیم گردیده است تا بتوانید در اوقات معینه تدریس تان را به پیش ببرید و اختتام بخشید؛ اگر احیاناً در کدام درس این زمانبندی عملی نشده، خود صلاحیت کم ویا زیاد کردن وقت را دارید؛ طور مثال: اگر فعالیت جریان درس که درمدت ۲۸ دقیقه از طرف مؤلفان درنظر گرفته شده است اگر از نظر شما زیاد است می توانید آن را ۲۰ دقیقه درنظر گرفته انجام دهید و از ۸ دقیقهٔ اضافی آن در اجرای متباقی فعالیت ها استفاده کنید و امثال آن.

۷) سهیم ساختن شاگردان در اجرای فعالیت از اولویت کاری شما درجریان تدریس می باشد که باید شاگردان را به اجرای فعالیت‌ها طور عادلانه سهم بدهید.

۸) تمرین ها باید درصنف با سهم گیری شاگردان کارشود.

۹) درصورتی که تعداد سؤالها دریک تمرین زیاد باشد یکتعداد آن برای تحکیم درس با اشتراک فعال شاگردان درصنف حل شود ومتباقی به حیث کار خانه گی به شاگردان وظیفهٔ داده شود.

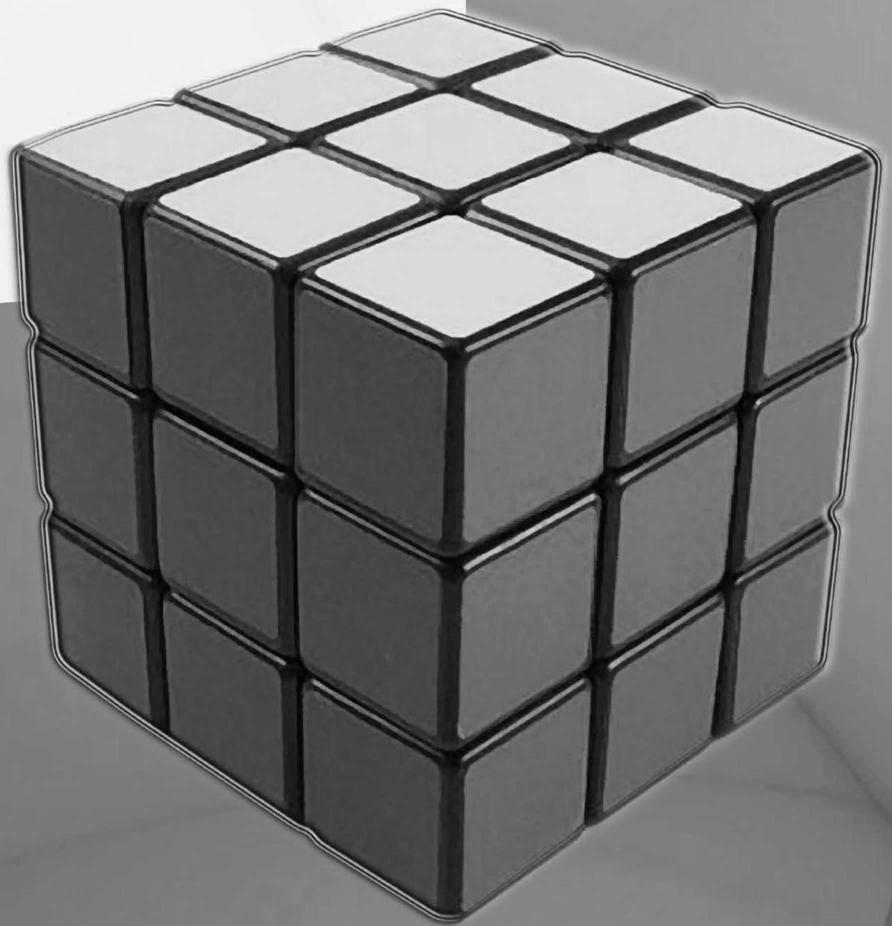
۱۰) در اخیر هر فصل تمرین مربوط فصل جا داده شده است، سعی شود تا نظر به مشکل بودن و یا آسان بودن سؤالها، سؤالهای تمرین را با سهم گیری شاگردان حل کنید طوری که فصل اول را در ۹ ساعت درسی، فصل دوم را در ۲ ساعت درسی، فصل سوم و چهارم هر یک را در ۱۰ ساعت درسی، فصل پنجم را در ۸ ساعت درسی، فصل ششم را در ۵ ساعت درسی، فصل هفتم را در ۱۰ ساعت درسی، فصل هشتم را در ۴ ساعت درسی، فصل نهم را در ۳ ساعت درسی و برای هر خلص یک ساعت درسی در نظر بگیرید.

۱۱) در کتاب درسی ریاضی ممکن بعضی اشتباهات طباعتی مو جود باشد و نمیتوان الی فرارسیدن تجدید نظر به اصلاح آن پرداخت؛ لیکن آن اشتباهات در نوشتن کتاب رهنمای معلم ریاضی در نظر گرفته شده است، معلمان محترم میتوانند به رویت کتاب رهنما اشتباهات را مرفوع سازند.

فصل اول

پولینوم(Polynome)
یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$





افاده های الجبری

صفحهٔ کتاب (3)　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • متحول، ثابت و افاده های الجبری را بشناسند. • اقسام افاده های الجبری را بشناسند و از همدیگر فرق کرده بتوانند. • پولینوم را تعریف کرده بتوانند و در افاده های الجبری، افادهٔ الجبری پولینومی افادهٔ ناطق الجبری و افادهٔ غیر ناطق الجبری را تشخیص کرده و در حل مسایل ریاضی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی(سلام، احوال پرسی، گرفتن حاضری، تنظیم صنف و ارتباط درس جدید با درس قبلی) برای خلق انگیزه از شاگردان سؤال قسمت ورودی بپرسید؛ که در سه افاده‌های داده شده الجبری، افاده های ناطق و غیر ناطق الجبری را نشان دهند. در صورت که شاگردان جواب داده نتوانند بعد از حل مثال ها آنها جواب را گفته می توانند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم، متحول، ثابت و افادهٔ الجبری را تعریف نموده مثال بدهد بعد با سهم گیری شاگردان پولینوم را تعریف و مثال اول این درس را به روی تخته حل نماید و شکل عمومی پولینوم توضیح شود.

بعد شاگردان در گروپ های مناسب فعالیت این درس را به انجام برسانند معلم نظارت، اصلاحات، راهنمای و کمک کند، یک شاگرد کار خود را روی تخته به دیگران توضیح کند.

معلم گرامی مثال دوم این درس را با سهم گیری شاگردان حل کند.

کوشش شود تا شاگردان فرق بین افاده های ناطق و غیر ناطق الجبری را بدانند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس معلم سؤال اول تمرین را با سهم گیری شاگردان حل کند.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

بعد از ارائه خلاصهٔ درس غرض ارزیابی درس سؤالات ذیل از شاگردان پرسیده شود.

1- کی میتواند پولینوم را تعریف کند؟

2- فرق بین افاده های پولینومی، ناطق و غیر ناطق الجبری چیست؟
یک، یک مثال از هر یک آن ها بدهید.
3- در افاده های الجبری $p^2-\frac{1}{p^3}$, $\sqrt{5}x$, $\sqrt{x}+y, 3x^{-2}$, $x-1$ ، 15 و 0 کدام یک پولینوم و کدام یک پولینوم نمی‌باشد؟

معلومات اضافی برای معلم
متحول و ثابت (Varible and Constant): علامت یا حرف که یک عدد نامعلوم را نمایش می دهد به نام متحول یاد می شود؛ طور مثال: اگر ست اعداد ناطق مورد نظر قرار داده شود $Q=\{\frac{p}{q}\mid p,q\in z, q\neq 0\}$
p هر عدد تام شده می تواند و همچنین q بدون صفر هر عدد تام شده می تواند اگر p=2 و q=7 باشد عدد $\frac{2}{7}$ یک عدد ناطق است و اگر $p=-11$ و q=25 باشد $\frac{-11}{25}$ نیز یک عدد ناطق می باشد.
در نتیجه به عوض p و q اعداد بی شمار تام موجود اند؛ پس p و q را متحولین (varibles) می گویند.
متحولین اکثراً توسط حروف x,y,z,p,q,r,s,t نشان داده می شوند.
هر عدد حقیقی یک قیمت خاص دارد که تغییر نمی کند؛ طور مثال: $\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, -10,5,7,99$,... و غیره. این طور عدد که قیمت آن تغییر نمی کند به نام ثابت (Constant) یاد می شوند.
در فورمول ارتباط درجه حرارت سانتی گرید و فارنهایت $(f=\frac{9}{5}c+32^\circ)$ که f و c متحولین و 32 و $\frac{9}{5}$ ثابت اند.

جواب به سؤال های تمرین
1- از افاده های الجبری زیر کدام یک افادهٔ الجبری ناطق، غیر ناطق و یا پولینوم می باشد؟

$\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, $\frac{3x^2}{2}$, $\frac{m+3}{6}$, $x+\frac{1}{x}$, $3x^2+\frac{xy}{2}$ و 13

حل:

$\frac{1}{x}$ یک افادهٔ ناطق الجبری می باشد؛ اما پولینوم نیست.

$\sqrt{x}-\frac{1}{2}$ یک افادهٔ غیر ناطق الجبری می باشد.

$\frac{3x^2}{2}$ یک پولینوم است که افادهٔ الجبری ناطق نیز می باشد.

$\frac{m+3}{6}$ پولینوم است که افادهٔ الجبری ناطق نیز می باشد.

$x+\frac{1}{x}$ افاده الجبری ناطق است؛ اما پولینوم نمی باشد.

$3x^2+\frac{xy}{2}$ افاده ناطق الجبری می باشد که پولینوم نیز است.

13 یک پولینوم ثابت می باشد.

2- در افاده های الجبری زیر کدام یک، پولینوم و کدام یک پولینوم نمی باشد؟

$3x \quad , \quad \frac{1}{7}x^3 - x \quad , \quad -20a^3b + 28ab^4 \quad , \quad 3x^2 + \frac{xy}{2}$

$\sqrt{8}x^8 \quad , \quad -0.03 \quad , \quad 3x \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad \frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$

حل:

$3x^2 + \frac{xy}{2}$ (پولینوم است)

$-20a^3b + 28ab^4$ (پولینوم است)

$\frac{1}{7}x^3 - x$ (پولینوم)

$3x$ (پولینوم)

$\frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$ (پولینوم نیست)

$8\sqrt{x}$ (پولینوم نیست)

$8x^{-8}$ (پولینوم نیست)

-0.03 (پولینوم است)

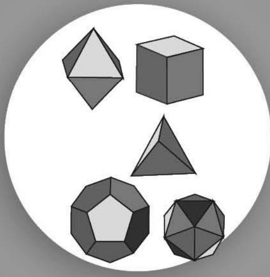
$\sqrt{8}x^8$ (پولینوم است)

3- در پولینوم $Px^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، a_1, a_2, a_3, a_n و a_0 را نشان دهید.

$a_0 = d \; , \; a_1 = c \; , \; a_2 = b \; , \; a_3 = -a \; , \; a_n = p$

4- در پولینوم $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$ ، a_1, a_2, a_3 و a_0 را نشان دهید.

$a_0 = -1 \; , \; a_1 = 0 \; , \; a_2 = -2 \; , \; a_3 = \frac{1}{2}$



اقسام پولینوم و درجه پولینوم

صفحهٔ کتاب (7)　　　　وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • انواع مختلف پولینوم را بشناسند. • درجه هر پولینوم را دریافت کرده بتوانند و نیز درجه پولینوم را نظر به هر حرف (متحول) تعین کرده بتوانند. • پولینوم ها را به طور صعودی و یا نزولی ترتیب کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از پولینوم ها استفاده کرده و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی غرض خلق کردن انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود که جواب آن چنین می باشد: درجه پولینوم اول (3) از دوم (8) و درجه پولینوم سوم (0) می باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم جدول صفحهٔ(7) را یا توسط چارت و یا روی تخته به شاگردان توضیح کند تا افاده های مونوم، باینوم و ترینوم را از هم تشخیص کرده بتوانند.

فعالیت این صفحه را شاگردان در گروپ ها کار کنند و یا می‌توانند که به صورت انفرادی شاگردان جواب های فعالیت را بگویند که جواب آن: افاده اول (ترینوم) دوم (باینوم) سوم و چهارم (مونوم) و افاده پنجم نیز (باینوم) می باشد.

بعد درجه پولینومی که از یک متحول(حرف) و یا از چندین حرف تشکیل شده باشدو نیز درجه یک پولینوم نظر به هر متحول توضیح گردد بعد از این که پولینوم های ثابت و صفری تعریف شوند و مثال های (1،2 و3) حل گردد. فعالیت صفحهٔ(9) را شاگردان کار کنند و معلم محترم آنها را راهنمایی و همکاری کند.

بعد از اینکه پولینوم های مکمل، ناقص، منظم، غیر منظم، صعودی و نزولی توضیح گردد، و فعالیت صفحه 10 را شاگردان کار کند و معلم محترم مثال 4 را حل کنند و همچنین پولینوم‌های معادل و متجانس تعریف شوند و توسط مثال ها توضیح گردد. مثال های 5 و 6 را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال های اول و دوم تمرین با سهم گیری شاگردان حل شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

معلمان محترم بهتر میدانند که به چه شیوه یی درس خود را ارزیـابی کننـد، طـور مثـال سـؤال هـای ذیـل از شـاگردان پرسیده شود.

- درجه پولینوم های ذیل را تعین کنید.

$Q(x) = x^2 - x - 1 \;,\;\; P(x) = x$

$P(x) = 1 \quad P(x) = 0 \quad g(x) = x^2y^3 - xy^4 - x^3y^3$

- اگر پولینوم $P(x) = 5xy^4 - 12x^my^3 - x^py^4$ یک پولینوم متجانس باشد قیمت های P و m را دریابید.

معلومات اضافی برای معلم

متوجه باشید که:

$\frac{4}{7}x^4y \;,\; -8m^3n^5 \;,\; 6.7x^4 \;,\; \frac{4}{7}x^4y^2$ و $3a^2b^2$ هر یک مونوم می باشند اما $\frac{4y^3}{5x} \;,\; -2x^{-4} \;,\; 4g^{\frac{1}{2}}y^2$ و $\frac{1}{3y^3}$ هیچکدام مونوم نمی باشند.

- شکل عمومی پولینوم دو متحوله:

$b_mx^m + b_mx^{m-1}\cdot y \,|\, b_{m-2}x^{m-2}\cdot y^2 + .. b_1xy^{m-1} + b_0y^m$ که پولینوم دو متحوله m درجه می باشد که $b_m \;,\; b_{m-1}..b_1 \;,\; b_0$ اعداد حقیقی و m یک عدد غیر منفی تام می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- در افاده های زیر مونوم، باینوم و ترینوم را نشان دهید و نیز درجه‌های آن را دریابید.

$\frac{1}{2}x^2y^5 \;,\;\; x^2 - y + 4 \;,\;\; x - 1 \;,\;\; x - x^2 - x^3 \;,\;\; 12x \;,\;\; -12$

حل:

- $\frac{1}{2}x^2y^5$ (مونوم) یک حده
- $x - x^2 - x^3$ (ترینوم) سه حده
- $x^2 - y + 4$ (ترینوم) سه حده
- $12x$ (مونوم)یک حده
- $x - 1$ (باینوم) دو حده
- -12 (مونوم) یک حده

2: در پولینوم های زیر پولینوم های مکمل و ناقص را نشان دهید و پولینوم های ناقص را به شکل پولینوم های مکمل بنویسید.

$x \;,\;\; x + 1 \;,\;\; x^2 - 1 \;,\;\; 2x^2 - 2x - 2 \;,\;\; 15 \;,\;\; x^3 + x - 1$

حل:

- x (ناقص)
- $x + 1$ (مکمل)

- x^2-1 (ناقص) به شکل پولینوم مکمل $x^2+0\cdot x-1$
- $2x^2-2x-2$ (مکمل)
- 15 (مکمل)
- x^3+x-1 (ناقص) شکل مکمل آن $x^3+0\cdot x^2+x-1$

3- اول درجۀ هر پولینوم را که در زیر داده شده است دریابید و سپس به شکل نزولی ترتیب نمایید؟

$$4x-5+6x^2+8x^3 \quad , \quad 2y^2-4y+3-3y^4+y^3 \quad , \quad 1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$$

حل:

- $4x-5+6x^2+8x^3$ درجۀ آن (3) بوده و شکل نزولی آن $8x^3+6x^2+4x-5$ می باشد.
- $2y^2-4y+3-3y^4+y^3$، درجه آن (4) و شکل نزولی آن $-3y^4+y^3+2y^2-4y+3,$ می باشد.
- $1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$ درجۀ آن (5) است و شکل نزولی آن $-x^5+2x^4-x^3+x^2+x+1$ می باشد.

4- اگر $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ باشد قیمت های n,p و c را دریابید.

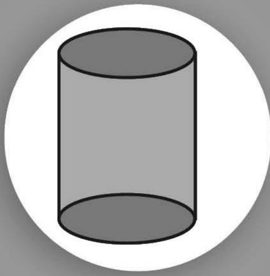
حل:

$$P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$$
$$P(x^2-2x+1)+nx+3n+c=2x^2-x+22$$
$$Px^2-2px+p+nx+3n+c=2x^2-x+22$$
$$px^2+(n-2p)x+p+3n+c=2x^2-x+22$$
$$\Rightarrow P=2 \qquad \begin{matrix} n-2p=-1 \\ n-4=-1 \\ n=3 \end{matrix} \qquad \begin{cases} p+3n+c=22 \\ 2+9+c=22 \\ c=11 \end{cases}$$

5- قیمت‌های b,a و c را دریابید؛ اگر: $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ و $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ پولینوم‌های معادل باشند.

حل:

$$3b+4=7\Rightarrow b=1$$
$$-2a+3=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$-c+3=0\Rightarrow c=3$$



دریافت قیمت و مجموع ضرایب پولینوم

صفحهٔ کتاب (13) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن قیمت یک پولینوم را در قیمت های داده شدهٔ متحول بیاموزند. • قیمت پولینوم و مجموع ضرایب پولینوم را دریافت کرده بتوانند • مساحت و حجم اشکال هندسی را از فورمول های مربوط آن به دست آورده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت یافتن قیمت های پولینوم را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، اشکال، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی و ار تباط درس جدید با درس قبلی، غرض ایجاد انگیزه سؤال ورودی از شاگردان بپرسید: اگر شاگردان حل کرده نتوانند معلم محترم حل کند: $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-1-1+1-1=-2$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

مثال اول با سهم گیری شاگردان حل شود و شاگردان فعالیت صفحه (13) را کار کنند، معلم محترم کار آنها را نظارت و همکاری نماید. جواب فعالیت:

$P(0)=-1$ $\quad$ $P(1)=1-1-1-1=-2$ $\quad$ $P(-1)=-1+1+1-1=0$

به همین ترتیب استاد محترم مثال های دوم، سوم و چهارم را با سهم گیری شاگردان حل کند.

فعالیت صفحهٔ(14) را شاگردان اجرا کنند که جواب آن $525\pi cm^3$ می باشد.

غرض توضیح موضوع یافتن ضرایب و یافتن قیمت یک پولینوم مثال های پنجم، ششم، هفتم و هشتم کتاب حل شود.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال اول تمرین حل شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی، سؤالات ذیل از شاگردان پرسیده شود:

1- اگر $x=-2$, $y=3$ ، $z=-1$ و $t=2$ باشد قیمت $\frac{3xy-2zt}{4xz}$ را معلوم کنید. (جواب $-\frac{7}{4}$)

2- اگر $y=3, x=2$ و $Z=-1$ باشد قیمت $3x+5yz$ را معلوم کنید. (جواب -9)

معلومات اضافی برای معلم

- اگر $x-y=2$ و $xy=4$ باشد قیمت x^3-y^3 را در یابید:

$$x-y=2$$
$$(x-y)^2=4$$
$$x^2-2xy+y^2=4 \quad \Rightarrow x^2+y^2=12$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2(x^2+y^2+xy)=2(12+4)=2(16)=32$$

- اگر $a=3$ و $b=-2$ باشد قیمت $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ عبارت است از:

$$8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3=(2a)^3+3(2a)^2+(3b)9+3(2a)(3b)^2+(3b)^3=(2a+3b)^3$$
$$=(6-6)=0$$

- اگر $x=\sqrt{5}-2$ باشد قیمت $\frac{1}{x}, x+\frac{1}{x}$, $(x+\frac{1}{x})^2$ و $x^2+\frac{1}{x^2}$ عبارت اند از:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}+2}{1}=\sqrt{5}+2$$
$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=(2\sqrt{5})^2=20$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=20\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=20-2=18$$

جواب به سؤال های تمرین

1- اگر پولینوم $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ باشد، $p(-1)$ و $p(\frac{1}{2})$ را دریابید.

حل:

$$P(-1)=-(-1)^4-(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-1+1-1+1-1=-1$$
$$P(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2})^4-(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})-1$$
$$P(\frac{1}{2})=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=\frac{-1-2-4-8-16}{16}=\frac{-31}{16}$$

2- اگر در پولینوم $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ قیمت $p(2)=17$ باشد قیمت k را دریابید.

حل:

$$P(2)=k\cdot 2^3-2^2+3(2)-1=17$$
$$8k-4+6-1=17$$
$$8k=17-1\Rightarrow 8k=16\Rightarrow k=2$$

3- اگر مجموع ضرایب عبارت از mx^2-2x+1 عبارت از 18 باشد قیمت m را دریابید.

حل:

$m-2+1=18$

$m=19$

4- قیمت پولینوم $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ را برای $x=-\frac{1}{2}$ دریابید.

حل:

$$P(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1+2-4}{8}=-\frac{1}{8}$$

5- در پولینوم‌های $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ و $D=x^2+4x-4$

برای $x=4$ قیمت کدام پولینوم از عدد 100 زیاد می باشد؟

$a)\ C \quad b)\ D \quad c)\ A \quad d)\ B$

حل:

جواب (a) درست است، یا برای $x=4$ قیمت پولینوم C از 100 زیاد می‌باشد.

6- در پولینوم های زیر برای $x=5$ کدام پولینوم بزرگترین قیمت را دارا می‌باشد؟

$a)\ x^2-2x+6 \quad b)\ 3x^4+6x+12 \quad c)\ -x^3-40x-300 \quad d)\ x^5-120x^4+10$

جواب (b) درست است.

7- اگر $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ باشد، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ و $p(-\frac{1}{2})$ را دریابید.

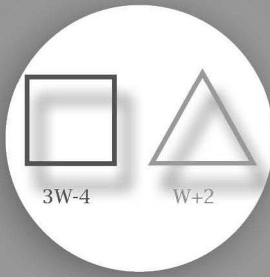
حل:

$P(-1)=1$

$P(0)=-1$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-29}{16}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{16}$$



عمیله های چهارگانه پولینوم ها (عملیه جمع و تفریق)

صفحهٔ کتاب (17)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • حدود مشابه (like terms) را بشناسند. • طریق جمع و تفریق حدود مشابه را بیاموزند. • حدود مشابه و غیر مشابه را از همدیگر تفکیک کرده بتوانند. • حدود مشابه را با هم جمع و از همدیگر تفریق کرده بتوانند. • قوانین تبدیلی و اتحادی عملیه‌های جمع و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع را در پولینوم‌ها تطبیق کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت، خاصیت های عملیه های جمع و تفریق پولینوم ها را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت، اشکال، تخته و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض تولید انگیزه سؤال ورودی را از شاگردان بپرسید که جواب آن چنین می باشد: اگر محیط مربع P باشد: $P=(3w-4)+(3w-4)+(3w-4)+(3w-4)=4(3w-4)=12w-16$ اگر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع C باشد: $C=3(w+2)=3w+6$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

در عملیه جمع و تفریق به شاگردان توضیح شود که حدود مشابه با هم جمع و یا از همدیگر تفریق می شوند.

طور مثال: $5x-4x^4-5x^3-9x+4x+1-1=-4x^4-5x^3$

مثال اول، با سهم گیری شاگردان حل شود و فعالیت اول این درس را شاگردان حل کنند. که جواب آن: $3ab^2+8a+2$ می باشد. و مثال دوم را با سهم گیری فعال شاگردان معلم محترم حل کند.

همچنین مثال اول عملیهٔ تفریق نیز با سهم گیری شاگردان حل شود و فعالیت اول صفحه19 را شاگردان اجرا کنند و معلم محترم نظارت و همکاری نماید. بعد از این که استاد مثال دوم این صفحه را حل کند. شاگردان فعالیت دوم این صفحه را کار کنند. که جواب آن $(-5x-10)$ می باشد.

مثال های 3 و 4 با سهم گیری شاگردان حل شود.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤالات اول و دوم تمرین این درس حل گردد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

اگر از پولینوم $A=4x^3-3ax+5$ پولینوم $B=11x^3+ax^2-x+b$ تفریق شود، حاصل تفریق مساوی به Cx^3-2x^2+dx-1 می شود قیمت های b,a و c را دریابید. جواب: $(a=2\ ,\ b=6\ ,\ c=-7)$

معلومات اضافی برای معلم

1- با افاده های الجبری زیر کدام افاده جمع و یا از آن تفریق شود که مربع مکمل به دست آید؟

$a:\ x^2+16y^2 \qquad b:\ -20xy+25y^2$

حل: با x^2+16y^2 اگر $(2x)(4y)$ جمع و یا تفریق شوند $(x\pm4y)^2$ تشکیل می شود.

$b:\ -20xy+25y^2=-2(2x)(5y)+5y^2$

پس اگر $(2x)^2$ به این افاده علاوه شود $(2x-5y)^2$ به دست می آید.

2- اگر $a-b=12$ و $ab=35$ باشد قیمت a^2+b^2 را دریابید.

$(a-b)^2=(12)^2$

$a^2-2ab+b^2=144\Rightarrow a^2+b^2=144+2ab\Rightarrow a^2+b^2=144+70=214$

جواب به سؤال های تمرین

1- مجموعهٔ دو پولینوم x^2+2x-y^2 است. اگر یک پولینوم $x^2-2xy+3$ باشد، پولینوم دیگری را دریابید.

حل:

$x^2+2x-y^2-(x^2-2xy+3)=x^2+2x-y^2-x^2+2xy-3=2x-y^2+2xy-3$

2- پولینوم $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ را از پولینوم $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ تفریق کنید.

حل:

$4x^4+2x^2+x^3-x+1-(3x^4+5x^3+2x^2-x+1)$

$=4x^4+2x^2+x^3-x+1-3x^4-5x^3-2x^2+x-1=x^4-4x^3$

3- از پولینوم $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ را تفریق کنید.

حل:

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3=6a^2b+2b^3$

4- اگر $A=a^3+2a^2-6a+7\ ,\ B=a^3+2a+5$ و $C=2a^3-a^2+2a-8$ باشد مجموعهٔ این سه پولینوم را دریابید.

$(A+B+C=?)$

حل:

$A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$

$B = a^3 \quad\quad + 2a + 5$

$\underline{C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8}$

$A + B + C = 4a^3 + a^2 - 2a + 4$

5- حاصل جمع افاده $(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$ مساوی است به:

$a) - 3ab^2 + 8a + 2$ $\quad\quad b)3ab^2 + 8a$ $\quad\quad c)3ab^2 + 8a + 2$

حل:

$(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$

$ab^2 + 3a + 2ab^2 + 3a - 2 + 2a + 4 = 3ab^2 + 8a + 2$

جزء (c) درست است.

6- جمع کنید: $(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$

حل:

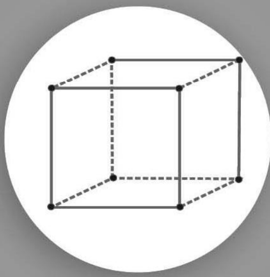
$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$

$= 3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab - 3ab + a^2 - 2 + 1 + 6ab = 3a^2b^2 + 3a^2 - 2ab - 1$

7- اگر دو طیاره از یک میدان هوایی در جهت مقابل همدیگر پرواز کنند، در صورتی که 2 ساعت بعد فاصلهٔ یک طیاره از میدان هوایی $x^2 + 2x + 400$ میل و فاصلهٔ طیارهٔ دیگر از همین میدان هوایی $3x^2 - 50x + 100$ میل باشد فاصله بین این دو طیاره را دریابید.

حل:

$(x^2 + 2x + 400) + (3x^2 - 50x + 100) = x^2 + 2x + 400 + 3x^2 - 50x + 100 = 4x^2 - 48x + 500$



ضرب پولینوم ها

صفحۀ کتاب (21) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>در اخیر این درس شاگردان باید:
• طریق ضرب کردن مونوم در مونوم، مونوم در پولینوم و پولینوم در پولینوم را بیاموزند.
• خاصیت های تبدیلی و اتحادی عملیه ضرب را بشناسند.
• پولینوم ها را با هم ضرب و قوانین تبدیلی و اتحادی عملیه ضرب را در پولینوم ها تطبیق کرده بتوانند.
• در حل مسایل ریاضی اهمیت عملیه ضرب پولینوم ها را درک و به آموختن علم ریاضی علاقه مند شوند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی؛ غرض ایجاد انگیزه برای آموزش درس سؤال قسمت ورودی از شاگردان بپرسید، اگر V حجم مکعب باشد:
$V = (x+1)(x+1)(x+1)cm^3 = (x+1)^3 cm^3 = (x^3+3x^2+3x+1)cm^3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
معلم محترم ضرب مونوم را در مونوم به شاگردان توضیح کند وبعد شاگردان فعالیت اول درس را اجرا کنند.
سپس استاد محترم مثال اول را روی تخته با سهم گیری شاگردان حل کنند؛ همچنین بعد از توضیح ضرب مونوم در پولینوم مثال (2) حل شود.
فعالیت صفحه (22) را شاگردان حل کند. ضرب پولینوم در پولینوم توضیح شود همچنان مثال های سوم و چهارم را با سهم گیری شاگردان حل کنید.
در گروپ های مناسب فعالیت های صفحه (23) و (24) را شاگردان حل کنند و معلم محترم سؤال صفحه (24) روی تخته حل کند.</td></tr>
<tr><td colspan="2">تحکیم درس: (7) دقیقه
غرض تحکیم درس سؤال اول تمرین درس حل گردد.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه
1- ضرب کنید:
$(a-b+1)(a+b-1)$</td></tr>
</table>

$(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$
$(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)$

معلومات اضافی

- اگر $x+\frac{1}{x}=5$ باشد قیمت $x^4+\frac{1}{x^4}$ را دریابید:

$$(x+\frac{1}{x})^2=5^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=25$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}=25-2=23 \Rightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})^2=(23)^2$$
$$x^4+2+\frac{1}{x^4}=529 \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=529-2$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=527$$

- چون مطابقت ها در مفردات این صنف شامل نمی باشد و در صنوف قبلی خوانده شده اند که بعضی از آن ها طور زیر می باشد:

$1:\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$2:\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$3:\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$4:\ (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
$5:\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$6:\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
$7:\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$8:\ (a+b)^3=a^3+.3a^2b+3ab^2+b^3$
$9:\ (a-b)^3=a^3-.3a^2b+3ab^2-b^3$
$10:\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$11:\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
$12:\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

جواب به سؤال های تمرین

1- ضرب کنید: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

حل:

$-2xy(2x^2+2y^2-2)=-4x^3y-4xy^3+4xy$
$(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)=-20x^3y^5z^3$

2- ارتفاع یک بکس x انچ، طول آن $(x+1)$ انچ و عرض آن $2x-4$ می باشد، اگر ارتفاع بکس 3 انچ باشد حجم این بکس مساوی است به:

$a)\ 40in^3$ $b)\ 24in^3$ $c)\ 48in^3$ $d)\ 20in^3$

حل:

$x(x+1)(2x-4)=(x^2+x)(2x-4)=2x^3-4x^2+2x^2-4x=2x^3-2x^2-4x$

چون x=3in می باشد، پس حجم مکعب (v) مساوی است به:

$$v = 2(3)^3 - 2(3)^2 - 4(3) = 54 - 18 - 12 = 54 - 30 = 24\,in^3$$

جزء b درست است.

3- حاصل ضرب $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ مساوی است به:

$a)1$ $b)-1$ $c)$ صفر $d)$ هر سه درست نیستند

حل:

$$(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p} = (a^{p+q})^{p-q}(a^{q+r})^{q-r}(a^{r+p})^{r-p}$$

$$= a^{p^2-q^2} \cdot a^{q^2-r^2} \cdot a^{r^2-p^2} = a^{p^2-q^2+q^2-r^2+r^2-p^2} = a^o = 1$$

جزء (a) درست است.



تقسیم پولینوم بر مونوم

صفحۀ کتاب (25)　　وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • تقسیم مونوم بر مونوم، پولینوم بر مونوم و پولینوم بر پولینوم را بیاموزند. • پولینوم را بر مونوم و پولینوم را بر پولینوم تقسیم کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت تقسیم پولینوم ها را درک کنند و از آموختن آن به ریاضی علاقه مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی؛ غرض ایجاد انگیزه برای آموزش سؤالات قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود: $\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}=\frac{4m^2}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{4m^2}{n^2}$, $\frac{3mn^2}{-mn}=-3n$, $\frac{14x^5}{2x^2}=7x^3$ $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{1}=\frac{b}{a}$, $\frac{-x^2}{x}=-x$, $\frac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از آن که معلم گرامی مثال های اول و دوم را روی تخته حل کند، فعالیت صفحۀ (25) را شاگردان اجرا کنند که جواب آن قرار زیر است:

$a:3x^3y^5-2x^9$　　$b:\frac{1}{y+1}$　　$c:\frac{5b}{3}$

طرق تقسیم پولینوم بر پولینوم توضیح گردد و با سهم گیری شاگردان مثال سوم حل شود و فعالیت صفحه 26 را شاگردان حل کنند که جواب آن (a^2-ab+b^2) می باشد.

مثال های چهارم و پنجم را معلم محترم با سهم گیری شاگردان حل نماید و فعالیت صفحۀ (27) را شاگردان در گروپ های مناسب حل کنند.

مثال ششم حل شود.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤالات ذیل حل شود:

$$\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}\right)\div\left(x+\frac{3}{4}\right)$$

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی درس سؤال های ذیل از شاگردان پرسیده شود.

$$(x^3-43x+42)\div(x^2+6x-7)$$

$$\frac{3x^4-4x^2+2x-1}{x-1}=?$$

معلومات اضافی

- $$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$1-8y^3+z^3+6yz=(1-2y+z)(1+4y^2+z^2+2y+2yz-z)$$

$$8x^6+9x^3+1=(2x^2+3x+1)(4x^4-6x^3+7x^2-3x+1)$$

زیرا که:

$$8x^6+9x^3+1=8x^6+1+27x^3-18x^3=(2x^2)^3+1^3+(3x)^3-3(2x^2)(1)(3x)$$

$$=(2x^2+1+3x)(4x^2+1+9x^2-2x^2-3x-6x^3)$$

$$=(2x^2+3x+1)(4x^4-6x^3+7x^2-3x+1)$$

- به کدام قیمت y پولینوم $16y^2+9y+7+y^4+7y^3$ بر y^3+3y+1 پوره تقسیم می گردد؟

حل:

$$\begin{array}{l|l}
y^4+7y^3+16y^2+9y+7 & y^3+3y+1 \\
\underline{-y^4 \quad \pm 3y^2 \pm y} & y+7 \\
7y^3+13y^2+8y+7 & \\
\underline{-7y^3 \quad \pm 21y \pm 7} & \\
13y^2-13y &
\end{array}$$

$$13y^2-13y=0$$

$$13y(y-1)=0$$

به قیمت های $y=1$ یا $y=0$ پولینوم فوق بر y^3+3y+1 پوره تقسیم می گردد.

جواب به سؤال های تمرین

1- به کدام قیمت P پولینوم $3x^3-7x^2-9x+p$ بر $x-13$ پوره تقسیم می شود؟

حل: به قیمت $p=-5291$ پولینوم داده شده بالای $x-13$ پوره تقسیم می شود.

2- خارج قسمت ها را دریابید.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

حل:

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)=x+3$

$(x^5-y^5)\div(x-y)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}=\dfrac{jk}{2}-\dfrac{3j^4k^3}{2}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}=4x^2+3x+\dfrac{5}{x}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}=3a^3b^5-2a^9$

$$\begin{array}{r} 2x\ +1 \\ x-3\,)\overline{2x^2\ -5x\ -1} \\ -(2x^2-6x) \\ \hline 0\ +1x\ -1 \\ -(x\ -3) \\ \hline 0+2 \end{array}$$

قضیه باقیمانده

صفحۀ کتاب درسی: (29) وقت تدریس:(1 ساعت درسی)

1- اهداف آموزشی – دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن باقیمانده عملیۀ تقسیم بدون اجرأی عملیه تقسیم را بیاموزند. • مفهوم قضیه باقیمانده را بفهمند. • بدانند که اگر پولینوم $p(x)$ بالای $(x-a)$ تقسیم گردد باقیمانده عبارت از $p(a)$ می باشد. • بدون اجرأی عملیه تقسیم باقیمانده را در یافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از قضیه باقیمانده استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
2- روشهای تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
3- مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب، درسی، چارت، تخته و...
4- توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی عرض خلق کردن انگیزه برای آموزش سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود که در سؤال باقیمانده مساوی است به: $R = p(4) = 4^3 - 6(4)^2 - 4 - 6 = 64 - 96 - 10 = -42$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

معلم محترم بعداز حل مثال اول ثبوت قضیۀ باقیمانده را به شاگردان توضیح دهد.

مثال دوم با سهم گیری شاگردان حل شود و فعالیت صفحه (30) را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند و نتیجه کار خویش را به دیگران توضیح کنند. بعد مثال های سوم و چهارم را با سهم گیری شاگردان کار کنید و فعالیت صفحۀ (31) را یک شاگرد روی تخته حل کند در اخیر مثال (5) به دو طریق هم بدون اجرأی عملیه تقسیم و با اجرأی عملیه تقسیم باقیمانده را بدست آورده و با هم مقایسه شود تا در نتیجه شاگردان درک کنند که توسط قضیۀ باقیمانده به آسانی باقی را به دست آورده می توانیم.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس و فراگیری بهتر شاگردان می توانید سؤالات ذیل را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

• بدون اجرای عملیه تقسیم اگر پولینوم $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$ بالای $(x-2)$ تقسیم گردد باقیمانده را در یابید.

(جواب (4–))

- اگر پولینوم $P(x)=2x^3-7x^2+12x+3a$ بالای $(x-3)$ پوره تقسیم شود قیمت a را دریابید.

(جواب $a=-9$)

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

برای این که از آموزش شاگردان مطمئن شوید سؤالات ذیل را از آنها بپرسید.

- بدون اجرای عملیه تقسیم باقیمانده تقسیم $p(x)=4x^3-13x+10$ را بالای $(x-3)$ دریابید؟
- اگر پولینوم $P(x)=x^3-4x^2+bx-2$ بالای $(x-1)$ پوره تقسیم گردد قیمت b را بدون اجرای عملیه تقسیم به دست آورید.

معلومات اضافی

- توسط قضیه باقیمانده قیمت a در صورتی که پولینوم $P(x)=2x^3-7x^2+12x+3a$ بالای (x-3) پوره تقسیم گردد عبارت است از:

در این صورت باید $R=P(3)=0$ شود.

$$P(3)=2\cdot3^3-7\cdot3^2+12\cdot3+3a=0$$
$$3a=-27$$
$$a=-9$$

- اگر $a+b+c=7$, $ab+bc+ca=20$ باشد، قیمت $a^2+b^2+c^2$ عبارت است از:

$$a+b+c=7$$
$$(a+b+c)^2=7^2$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=49$$
$$a^2+b^2+c^2+2(20)=49$$
$$a^2+b^2+c^2=49-40=9$$

- اگر $P(x)=x^{79}+3x^{24}+5$ بر $(x-1)$ تقسیم گردد باقی آن عبارت است از: R=9
- توسط قضیه باقیمانده قیمت a را دریافت کرده می توانیم که اگر $P(x)=2x^2-ax^2-(2a-3)x+2$ بر $x+1$ پوره تقسیم گردد.

$$P(-1)=2(-1)^3-a(-1)^2-(2a-3)(-1)+2=0$$
$$\Rightarrow -2-a+2a-3+2=0$$
$$\Rightarrow a-3=0$$
$$a=3$$

جواب به سؤال های تمرین

1– به کمک قضیهٔ باقیمانده (Remainder theorem) باقیمانده را دریابید.

$(5x^3-x^2+4x+1)\div(x-3)$ $\quad$ $(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\quad$ $(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$

حل:

a) $P(3)=5(3)^3-(3)^2+4(3)+1=5\cdot27-9+12+1=139$

b) باقیمانده $(6x^2+15)\div(4x+9)$ مساوی است به

$4x+9=0$

$4x=-9$

$x=-\frac{9}{4}$

$6(-\frac{9}{4})^2+15=6(\frac{81}{16})+15=\frac{3(81)}{8}+15=\frac{243+120}{8}=\frac{363}{8}=45\frac{3}{8}$

c) باقیمانده $(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$ مساوی است به 2.64

d) باقیمانده $(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$ عبارت از $\frac{83}{4}$ می باشد.

2- اگر پولینوم $5x^3-k^2x^2+3kx-6$ بر $(x+2)$ تقسیم شود، به کمک قضیهٔ باقی مانده بگویید که به کدام قیمت k باقیمانده -44 خواهد بود؟

حل: هرگاه باقیمانده $(5x^3-k^2x^2+3kx-6)\div(x+2)$ مساوی به -44 باشد قیمت k باید $k=-1$ یا $k=-\frac{1}{2}$ باشد.

3- اگر پولینوم $2k^2y^4-ky^2+1$ بالای $(y-\frac{1}{2})$ تقسیم شود به کدام قیمت k عدد 2 باقی می ماند؟

حل: باید $k=4$ یا $k=-2$ باشد.

4- اگر پولینوم $m^2x^4-10x^2+2$ بالای $(x-1)$ تقسیم شود به کدام قیمت m باقیماندهٔ آن 17 می شود؟

حل: برای این که باقیمانده 17 شود باید $m=\pm5$ باشد.

$(x^3+1)\div(x+1)$
$P(-1)=(-1^5+1)$
$=-1+1=0$

صفحهٔ کتاب درسی: (33) وقت تدریس:(1 ساعت درسی)

1- اهداف آموزشی –دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • مفهوم قضیهٔ فکتور و قضیهٔ معکوس فکتور را بفهمند. • بدانند که در کدام حالت دو حده $(x-a)$ فکتور یک پولینوم می‌باشد. • ارتباط بین قضیهٔ فکتور و قضیهٔ باقیمانده را بدانند. • با استفاده از قضیهٔ فکتور، فکتورهای پولینوم‌ها را دریابند. • با استفاده از قضیهٔ فکتور افاده‌های الجبری را تجزیه کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از قضیهٔ فکتور استفاده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند در نتیجه از حل آن‌ها علاقه‌مند به آموزش ریاضی شوند.
2- روشهای تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
3- مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب، درسی، چارت، تخته و...
4- توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی، غرض ایجاد انگیزه برای آموزش از شاگردان سؤال قسمت ورودی پرسیده شود: $P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+2=1-4+1+2=0$ چون $P(1)=0$ است؛ پس $(x+1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ می‌باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

معلم محترم بعد از ثبوت قضیهٔ فکتور مثال اول درس را با سهم گیری فعال شاگردان حل کند.

از طریق سؤال و جواب فعالیت اول این درس از شاگردان پرسیده شود، که جواب آن چنین است:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$P(1)=2\cdot1^3-13(1)+26(1)-15=0$

پس $(x-1)$ فکتور این پولینوم می باشد.

بعد از اینکه معلم محترم مثال دوم، سوم و چهارم درس را با سهم گیری شاگردان روی تخته حل کند، فعالیت صفحه (34) را شاگردان در گروپ‌ها حل کنند و نتیجهٔ آن را روی تخته به دیگران توضیح نمایند که جواب آن چنین است:

$x-6=0 \Rightarrow x=6$

$6^6-36(6)^3+1296=6^6-6^5+6^4=46656-7776+1296\neq0$

پس $(x-6)$ فکتور این پولینوم نمی باشد.

$x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$20(-\frac{1}{8})+7(-\frac{1}{2})+6=0$

پس $(x+\frac{1}{2})$ یک فکتور این پولینوم می باشد.

$x-0.1=0 \Rightarrow x=0.1$

$10(0.1)^3-11(0.1)^2+1=10(0.001)-11(0.01)+1=0$

پس $(x-0.1)$ یک فکتور این پولینوم می باشد.

$x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{8})=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$

پس $(x-\frac{1}{2})$ یک فکتور این پولینوم می باشد.

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$

$(-5)^3+125=-125+125=0$

پس $(x+5)$ یک فکتور این پولینوم می باشد.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$(-2)^5+32=-32+32=0$

پس $(x+2)$ یک فکتور این پولینوم می باشد.

بعد از اینکه معلم محترم مفهوم معکوس قضیه را به شاگردان توضیح کرد مثال اول، دوم و سوم را با سهیم گیری شاگردان روی تخته حل کند. فعالیت صفحهٔ(35) به طریق سؤال و جواب از شاگردان بپرسید که جواب آن چنین است:

$P(2)=2^3-4(2)^2+5(2)-2=0$

پس عدد 2 یک جذر این معادله می باشد و مثال چهارم را روی تخته حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال اول تمرین با سهم گیری فعال شاگردان روی تخته کار شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

بعد از اینکه معلم خلاصهٔ درس را به شاگردان می گوید، غرض ارزیابی درس می‌تواند سؤالاتی مانند سؤال ذیل از شاگردان بپرسید.

- توسط قضیهٔ فکتور نشان دهید که $(x+2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-6x^2+32$ می‌باشد.

معلومات اضافی

- r یک جذر معادلهٔ پولینومی $P(x)=0$ می‌باشد، در صورتیکه $P(r)=0$ شود.
- $(x-r)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ می‌باشد؛ اگر $P(r)=0$ شود.

- اگر پولینوم $P(x)$ بالای $(x-r)$ تقسیم گردد و باقیمانده صفر شود، گراف پولینوم محور x را در r قطع می-کند یا گراف در r نقطهٔ صفری دارد.
- قیمت k را در صورتی که باینوم های داده شده فکتور های پولینوم های مربوطه باشند، عبارت است از:

$x^3+3x^2-x+k \quad : \quad x-2 \qquad \Rightarrow k=-18$

$kx^3-2x^2+x-6 \quad : \quad x+3 \qquad \Rightarrow k=-1$

جواب به سؤال های تمرین

1- به کدام قیمت k , $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ می باشد؟

حل: به قیمت $K=-2$ باینوم $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ می‌باشد.

2- آیا $(x+3)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ می باشد؟

حل: چون $P(-3)=(-3)^5-(3)^3+27(-3)^2-27=0$ می‌شود؛ پس $(x+3)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ می‌باشد.

3- توسط قضیه فکتور نشان دهید که $(x+7)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ می باشد.

حل:

چون $P(-7)=(-7)^3+8(-7)^2+8(-7)+7=-343+392-56+7=0$ $P(-7)=R=0$ است؛ پس $(x+7)$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

4- بدون انجام دادن عملیه تقسیم نشان دهید که آیا $(y-7)$ یک فکتور پولینوم $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ می باشد. یاخیر؟

حل:

$$P(7)=7^4+2(7)^3-6(7)^2-14(7)-7=2401+686-294-98-7=3087-399\neq 0$$

چون $R=P(7)=2087-399\neq 0$ پس $(y-7)$ فکتور پولینوم داده شده نمی‌باشد.

5- نشان دهید که آیا $\left(m+\frac{1}{2}\right)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2m^2+4m-2$ می باشد؟

حل:

$P(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^2+4(-\frac{1}{2})-2 \Rightarrow P(-\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{4}-2-2=\frac{1}{2}-4\neq 0$ پس $(m+\frac{1}{2})$ فکتور این پولینوم نمی‌باشد.

6- به کمک قضیه فکتور پولینوم $x^3+x^2-10x+8$ را تجزیه کنید.

حل:

$P(1)=1^3+1^2-10(1)+8=1+1-10+8=0$ پس $(x-1)$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-10x+8 & x-1 \\ \underline{x^3 \mp x^2} & x^2+2x-8 \\ \quad 2x^2-10x & \\ \quad \underline{2x^2 \mp 2x} & \\ \qquad -8x+8 & \\ \qquad \underline{\mp 8x \pm 8} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x-8)=(x-1)(x+4)(x-2)$ $\qquad$ $x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x-2)(x+4)$

7- اگر $(x-1)$ و $(x+1)$ فکتور های پولینوم $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ باشند، قیمت های a و b را دریابید.

حل:

$P(1)=1+a+b+2=0$

$P(-1)=-1+a-b+2=0$

$a+b=-3$ $\qquad$ $-2-b=-1$

$a-b=-1$ $\qquad$ $-b=1$

$2a=-4$ $\qquad$ $\boxed{b=-1}$

$\boxed{a=-2}$

8- به کدام قیمت k، $(x-5)$ یک فکتور پولینوم $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ می‌باشد؟

حل:

$Q(5)=5^3-5(5)^2-16(5)+k$

$125-125-80+k=0$

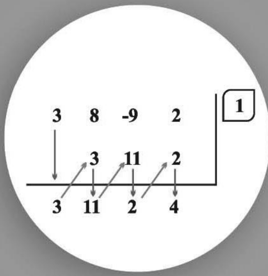
$-80+k=0 \Rightarrow \boxed{k=80}$

9- به کدام قیمت k عدد (-1) یک جذر معادله $x^3-9x^2+14x+k=0$ می باشد؟

حل:

$(-1)^3-9(-1)^2+14(-1)+k=0$

$-1-9-14+k=0 \Rightarrow \boxed{k=24}$



تقسیم ترکیبی(Synthetic devision)

صفحهٔ کتاب درسی: (37) وقت تدریس:(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی – دانشی – مهارتی – ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • مراحل انجام دادن عملیهٔ تقسیم ترکیبی را بیآموزند. • توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقیمانده را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از تقسیم ترکیبی استفاده کرده بتوانند و اهمیت آنرا درک کنند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، کار های گروپی، انفرادی و ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت، تخته، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	غرض خلق کردن انگیزه سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود: $3 \quad -1 \quad 2 \quad -5 \mid 2$ $6 \quad 10 \quad 24$ $3 \quad 5 \quad 12 \quad 19$ $Q(x)=3x^2+5x+12 \qquad R=19$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم با سهم‌گیری شاگردان مثال اول را حل کند و مراحل عملیهٔ تقسیم ترکیبی را واضح سازد، بعد فعالیت صفحهٔ 38 را شاگردان در گروپ‌ها حل کنند.

استاد محترم مثالهای دوم، سوم، چهارم و پنجم را با سهم گیری شاگردان حل نماید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

توسط تقسیم ترکیبی $P(x)=2x^4+x^3-3x^2+2x$ را بالای $(x+4)$ تقسیم کنید.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

بعد از خلص درس غرض ارزیابی قسمتی از سؤال اول تمرین این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

1- اگر پولینوم $P(x)=3x^4-8x^2-11x+1$ بر $(x-2)$ تقسیم گردد خارج قسمت و باقیمانده آن عبارت است از: $Q(x)=3x^3+6x^2+4x-3$ و $R=-5$

2- توسط تقسیم ترکیبی نشان داده می توانیم که $(3x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=6x^3-4x^2+3x-2$ می باشد.

$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$P(\frac{2}{3}) = 6(\frac{2}{3})^3 - 4(\frac{2}{3})^2 + 3(\frac{2}{3}) - 2 = \frac{48-48}{27} = 0$

3- اگر $P(x) = x^{79} + 3x^{24} + 5$ بر $(x-1)$ تقسیم گردد باقیمانده آن مساوی است به:

$P(1) = 1^{79} + 3(1)^{24} + 5 = 1 + 3 + 5 = 9$

4- اگر پولینوم $P(x) = 3x^4 - 8x^2 + 11x + 1$ بر $(x+2)$ تقسیم گردد، باقیمانده مساوی است به:

$R = p(-2) = -5$

جواب به سؤال های تمرین

1- توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقیمانده را دریابید.

$(10x^2 + 2x + 1) \div (x+1)$

$(2x^3 - 7x^2 - 2x + 12) \div (2x - 3)$

$(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$

$(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

حل:

a)

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 1 & -1 \\ & -10 & 8 & \\ \hline 10 & -8 & 9 & \end{array}$$

$Q(x) = 10x - 8$

$R = 9$

b)

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 12 & 3/2 \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 0 & \end{array}$$

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$Q(x) = \frac{2x^2 - 4x - 8}{2} = x^2 - 2x - 4$ $\quad R = 0$

c)

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -3 & 7 & -4 \\ & -20 & 80 & -308 & \\ \hline 5 & -20 & 77 & -301 & \end{array}$$

$Q(x) = 5x^2 - 20x + 77 \quad R = -301$

d)

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 15 & -\frac{9}{4} \\ & -\frac{54}{4} & \frac{243}{8} & \\ \hline 6 & -\frac{54}{4} & \frac{363}{8} & \end{array}$$

$$4x+9=0 \Rightarrow x=-\frac{9}{4}$$

$$Q(x)=\frac{6x-\frac{27}{2}}{4}=\frac{3}{2}x-\frac{27}{8} \qquad R=\frac{363}{8}$$

e)

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 20 & 1/2 \\ & 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \\ \hline 6 & 5 & \frac{3}{2} & \frac{83}{4} & \end{array}$$

$$p-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

$$Q(x)=6x^2+5x+\frac{3}{2} \qquad R=\frac{83}{4}$$

2- توسط تقسیم ترکیبی باقیمانده و خارج قسمت ها را دریابید.

$(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

حل:

a)

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -17 & 0 & 0 & -9 & 3 \\ & 3 & 9 & -24 & -72 & -216 & \\ \hline 1 & 3 & -8 & -24 & -72 & -225 & \end{array}$$

$Q(x)=y^4+3y^3-8y^2-24y-72 \qquad R=-225$

b)

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 0 & 5 & 5 \\ & 20 & 90 & 450 & \\ \hline 4 & 18 & 90 & 455 & \end{array}$$

$Q(x)=4x^2+18x+90 \qquad R=455$

c)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 8 & 7 & -7 \\ & -7 & -7 & -7 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$Q(x)=x^2+x+1 \qquad R=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1+2 & -5 & -6 & & \boxed{-1} \\ -1 & -1 & +6 & & \\ \hline 1 \quad 1 & -6 & 0 & & \end{array}$$

دریافت فکتور و قیمت پولینوم توسط تقسیم ترکیبی

صفحهٔ کتاب درسی: (41)   وقت تدریس:(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی – دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• طریق یافتن فکتور و قیمت پولینوم را توسط تقسیم ترکیبی بیآموزند. • توسط تقسیم ترکیبی قیمت و فکتور پولینوم را دریافت کرده بتوانند. • توسط تقسیم ترکیبی جذور معادله‌های پولینومی را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از تقسیم ترکیبی استفاده کرده بتوانند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت، تخته و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی طوری که در درس های قبلی توضیح گردیده است سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود: $\begin{array}{rrrr\|r} 1 & 9 & 27 & 27 & -3 \\ & -3 & -18 & -27 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & 0 & \end{array}$ $\quad Q(x)=x^2+6x+9 \qquad R=0$ چون $R=0$ است؛ پس $(x+3)$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم با سهم گیری شاگردان مثال‌های اول، دوم و سوم را کار کنند، بعد فعالیت صفحهٔ 42 را شاگردان کار کنند که جواب آن چنین می باشد:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 10 & 5 & 1 \\ & 1 & 0 & 10 & \\ \hline 1 & 0 & 10 & 15 & \end{array}$$

پس برای $(x=1)$ قیمت این پولینوم 15 می باشد.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 10 & 5 & 3 \\ & 3 & 6 & 48 & \\ \hline 1 & 2 & 16 & 53 & \end{array}$$

پس برای $(x=3)$ قیمت این پولینوم 53 می باشد.

مثال چهارم حل شود و توسط تقسیم ترکیبی یافتن جذور معادله را در مثال پنجم توضیح کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس توسط تقسیم ترکیبی برای قیمت‌های داده شدهٔ x قیمت پولینوم های زیر را دریابید:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x \quad : \quad P(-4) = (392)$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \quad : \quad P(3) = (31)$

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

غرض ارزیابی درس سؤالات ذیل از شاگردان پرسیده شود:

1- توسط تقسیم ترکیبی قیمت k را در صورتی دریابید که $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $x^3 + 3x^2 - x + k$ باشد.

که جواب آن قرار زیر می باشد:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & k & 2 \\ & 2 & 10 & 18 & \\ \hline 1 & 5 & 9 & k+18 & \end{array}$$

$k + 18 = 0$

$k = -18$

2- توسط تقسیم ترکیبی قیمت k را در صورتی دریابید که $(x+3)$ یک فکتور پولینوم $kx^3 - 2x^2 + x - 6$ باشد.

که جواب آن قرار زیر می باشد:

$$\begin{array}{cccc|c} k & -2 & 1 & -6 & -3 \\ & -3k & 9k+6 & -21-27k & \\ \hline k & -3k-2 & 7+9k & -27-27k & \end{array}$$

$-27 - 27k = 0$

$k = -1$

معلومات اضافی

یافتن جذرالمربع افاده های الجبری

1: توسط تجزیه:

$$\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2} = ?$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}x)^2 + 2(\frac{1}{3}x)(\frac{1}{4}y) + (\frac{1}{4}y)^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y)^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y$$

2: توسط تقسیم: $\sqrt{16x^4 - 24x^3 + 25 - 12x + 4}$ عبارت است از:

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline & 16x^4 - 24x^3 + 25x^2 - 12x + 4 \\ 4x^2 & -16x^4 \\ \hline 8x^2 - 3x & -24x^3 + 25x^2 \\ & \mp 24x^3 \pm 9x^2 \\ \hline 8x^2 - 6x + 2 & 16x^2 - 12x + 4 \\ & _16x^2 \mp 12x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{-24x^3}{8x^2} = -3x \qquad \frac{16x^2}{8x^2} = 2$

پس جذر مطلوب $\pm(4x^2 - 3x + 2)$ می باشد.

- به همین طریق $\sqrt{\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}}$ را دریابید.

حل:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3} \\ \hline & \frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\ \frac{x^2}{2} & \pm\frac{x^4}{4} \\ \hline x^2-2x & -2x^3+4x^2 \\ & \mp 2x^3 \pm 4x^2 \\ \hline x^2-4x+\frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\ & -\frac{ax^2}{3}\mp\frac{4ax}{3}\pm\frac{a^2}{9} \\ \hline & 0 \end{array}$$

جواب: $\pm(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3})$ می باشد.

- جذر مربع $(2a^2-5a+3)(2a^2+5a-12)(a^2+3a-4)$ عبارت است از:

$$(2a^2-5a+3)(2a^2+5a-12)(a^2+3a-4)=(2a-3)(a-1)(2a-3)(a+4)(a-1)(a+4)$$
$$=(2a-3)(2a-3)(a-1)(a-1)(a+4)(a+4)$$

پس جذر مربع آن مساوی است به: $\pm(2a-3)(a-1)(a+4)$

- با $9x^4-12x^3+10x^2-3x-3$

a: کدام افاده جمع شود تا مربع مکمل شود.

b: کدام افاده از آن تفریق شود تا مربع مکمل شود.

c: قیمت x را معلوم کنید تا مربع مکمل گردد.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-2x+1 \\ \hline & 9x^4-12x^3+10x^2-3x-3 \\ 3x^2 & -9x^4 \\ \hline 6x^2-2x & -12x^3+10x^2 \\ & \mp 12x^3 \pm 4x^2 \\ \hline 6x^2-4x+1 & 6x^2-3x-3 \\ & \underline{-6x^2 \pm 4x \pm 1} \\ & x-4 \end{array}$$

a: $-x+4$ جمع شود تا مربع مکمل شود.

b: $x-4$ از آن تفریق شود تا مربع مکمل شود.

c: $x-4=0 \Rightarrow x=4$ پس به قیمت $x=4$ مربع کامل می شود.

جواب به سؤال های تمرین

1- توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که $(x+\frac{1}{2})$ یک فکتور پولینوم $20x^3+7x+6$ و $(x+1)$ یک فکتور پولینوم x^4-2x^2+x+2 می باشد.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 20 & 0 & 7 & 6 & -1/2 \\ & -10 & 5 & -6 & \\ \hline 20 & -10 & 12 & 0 & \end{array}$$

چون $R=0$ است؛ پس $(x+\frac{1}{2})$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

چون $R=0$ است؛ پس $(x+1)$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

2- آیا $(x-0{,}1)$ یک فکتور پولینوم $10x^3-11x^2+1$ می باشد؟ چرا؟

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 10 & -11 & 0 & 1 & 0.1 \\ & 1 & -1 & -0.1 & \\ \hline 10 & -10 & -1 & 0.9 & \end{array}$$

چون $\mathrm{R}=0.9\neq 0$ است؛ پس $(x-0.1)$ یک فکتور پولینوم داده شده نمی‌باشد.

3- توسط تقسیم ترکیبی قیمت پولینوم $6-y-6y^2+y^3$ را برای $y=6$ دریابید.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & -1 & 6 & 6 \\ & 6 & 0 & -6 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

پس برای $y=6$ قیمت پولینوم داده شده صفر می‌باشد.

4- اگر عدد (1) یک جذر معادلهٔ $x^3+x^2-10x+8=0$ باشد جذور دیگر این معادله را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -10 & 8 & 1 \\ & 1 & 2 & -8 & \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$$
$$x=-4 \qquad x=2$$

جذور دیگر این دو معادله 2 و -4 می‌باشد.

5- اگر عدد(2-) یک جذر معادله $x^3+4x^2+kx+8=0$ باشد به کمک تقسیم ترکیبی قیمت k را دریابید.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & k & 8 & -2 \\ & -2 & -4 & -2k+8 & \\ \hline 1 & 2 & k-4 & -2k+16 & \end{array}$$

$$-2k+16=0$$

$$-2k=-16$$

$$k=8$$

حل تمرین فصل اول:

1- قیمت k را دریابید در صورتی که:

a: اگر $(x+5)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+kx+125$ باشد.

b: اگر $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ باشد.

c: اگر پولینوم $P(x)=x^3+2x^2-3kx-10$ بالای $(x+3)$ تقسیم گردد و عدد 8 باقی بماند.

حل:

$a)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 125 & -5 \\ & -5 & 25 & -5k-125 & \\ \hline 1 & -5 & k+25 & -5k & \end{array}$$

$$-5k=0 \;\Rightarrow\; k=0$$

و یا

$$P(-5)=(-5)^3-5k+125=0$$
$$-125-5k+125=0$$
$$-5k=0$$
$$k=0$$

اگر $k=0$ باشد در این صورت $(x+5)$ یک فکتور پولینوم داده شده می‌باشد.

$b)$

$$Q(1)=2(1)^4-3(1)^3-(1)-2k=0$$
$$2-3-1-2k=0$$
$$-2k-2=0$$
$$-2k=2$$
$$\boxed{k=-1}$$

در صورتیکه $k=-1$ باشد؛ $(x-1)$ یک فکتور پولینوم داده شده می‌باشد.

c)

$$P(-3)=(-3)^3+2(-3)^2+9k-10=8$$
$$-27+18+9k-10=8$$
$$-19+9k=8$$
$$9k=27$$
$$\boxed{k=3}$$

2- توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت ها (Quotients) و باقیمانده ها (Remainders) را در یابید.

$(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$

$(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$

حل:

a)

1	4	0	1	−3	−28	−4
	−4	0	0	−4	28	
1	0	0	1	−7	0	

$Q(x)=x^4+x-7 \quad , \quad R=0$

b)

30	−20	−100	1000	10
	300	2800	27000	
30	280	2700	28000	

$Q(x)=30x^2+280x+2700 \quad , \quad R=28000$

c)

5	0	−6	3	−4	−4
	−20	80	−296	1172	
5	−20	74	−293	1168	

$Q(x)=5x^3-20x^2+74x-293 \quad , \quad R=1168$

d)

10	−31	24	3/2
	15	−24	
10	−16	0	

$Q(x)=10x-16 \quad , \quad R=0$

3- توسط قضیه فکتور نشان دهید که $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ می باشد.

حل: چون $P(1)=(1^3)-4(1)^2+1+2=1-4+1+2=0$ می باشد؛ پس $(x-1)$ یک فکتور پولینوم داده شده می‌باشد.

4- توسط قضیه فکتور نشان دهید که $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ می باشد.

حل: چون $P(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$ می باشد. پس $(x-\frac{1}{2})$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ می‌باشد.

5- اگر $x=-\frac{1}{2}$ باشد قیمت پولینوم $P(x)=5x^2+x-9$ را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.

حل:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -9 & -1/2 \\ & -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \\ \hline 5 & -\frac{3}{2} & -\frac{33}{4} & \end{array}$$

پس برای $x=-\frac{1}{2}$ قیمت این پولینوم $-\frac{33}{4}$ می‌باشد.

6- اگر $x=3$ باشد قیمت پولینوم $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ را توسط تقسیم ترکیبی در یابید.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ & 6 & 9 & 39 & \\ \hline 2 & 3 & 13 & 40 & \end{array}$$

اگر $x=3$ باشد، قیمت این پولینوم عدد 40 می‌باشد.

7- توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که عدد 3 یک جذر معادله $x^3-3x^2+x-3=0$ می باشد.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ & 3 & 0 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

چون $R=0$ است؛ پس عدد 3 یک جذر معادله پولینومی داده شده می‌باشد.

8- توسط قضیه فکتور نشان دهید که اعداد 1- و 2 جذر های معادله $x^4-5x^2+4=0$ می باشند.

حل:

$$(-1)^4-5(-1)^2+4=1-5+4=0$$
$$(2)^4-5(2)^2+4=16-20+4=0$$

پس اعداد 1- و 2 جذرهای معادلهٔ داده شده می‌باشد.

9- قیمت k را توسط تقسیم ترکیبی در یابید در صورتی که $(x+3)$ یک فکتور پولینوم

$P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ باشد.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & k & -22 & 24 & -3 \\ & -9 & -3k+27 & 9k-15 & \\ \hline 3 & k-9 & -3k+5 & 9k+9 & \end{array}$$

$$9k+9=0 \Rightarrow k=-1$$

در صورتیکه $(x+3)$ یک فکتور پولینوم داده شده باشد باید $k=-1$ باشد.

10- توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقی مانده را در یابید.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $\quad (x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $\quad (5x^3-3x+7)\div(x+4)$

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -14 & 11 & 4 \\ & 4 & 12 & -8 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 3 & \end{array}$$

$Q(x)=x^2+3x-2 \quad , \quad R=3$

به همین ترتیب 3 جزء دیگر این سؤال نیز حل می‌شود.

11- قیمت های b و c را در صورت دریابید که اگر پولینوم $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ بر x^2-3x+2 تقسیم کنیم و باقیماند صفر شود.

حل:

$$\begin{array}{l|l} x^4+6x^3-20x^2+bx+c & x^2-3x+2 \\ \underline{-x^4 \mp 3x^3 \pm 2x^2} & x^2+9x+5 \\ \quad 9x^3-22x^2+bx & \\ \quad \underline{-9x^3 \mp 27x^2 \pm 18x} & \\ \qquad 5x^2+bx-18x+c & \\ \qquad \underline{-5x^2 \quad \mp 15x \pm 10} & \\ \qquad\quad bx-3x-10+c=0 & \\ \qquad\quad (b-3)x-10+c=0 & \end{array}$$

در نتیجه $b=3$ و $c=10$ می‌باشد.

12- قیمت m را در یابید در صورتی که اگر پولینوم $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ بالای (x^2+2x-1) تقسیم شود باقیمانده صفر شود.

حل:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+5x^2-mx+4 & x^2+2x-1 \\ \underline{\pm 2x^3 \pm 4x^2 \mp 2x} & 2x+1 \end{array}$$

$$x^2-mx+2x+4$$
$$\underline{\pm x^2 \qquad \pm 2x \mp 1}$$
$$-mx+5=0$$
$$-mx=-5 \qquad m=\frac{5}{x}$$

در صورتیکه $m=\frac{5}{x}$ باشد، پولینوم $K(x)=2x^3+5x^2-1$ بالای x^2+2x-1 پوره تقسیم می‌شود.

13- اگر $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ و $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ باشد $Kb+La$ را دریابید.

حل: پولینوم اول را در b و دوم را در a ضرب می‌نماییم:

$$Kb=3ab(x-1)^2-ab(x-1)-4b$$
$$\underline{La=-3ab(x-1)^2+ab(x-1)+16a}$$
$$Kb+La=-4b+16a$$
$$=16a-4b$$

14- به کدام قیمت x پولینوم $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ بالا $(3x^2-1)$ پوره قابل تقسیم می باشد؟

حل:

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{\pm 12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \end{array}$$

$$3x^3-9x^2+x$$
$$\underline{\pm 3x^3 \qquad \mp x}$$
$$-9x^2+2x+5$$
$$\underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3}$$
$$2x+2=0$$
$$x=-1$$

یا به عباره دیگر $P(-1)=0$ می شود.

15- به کدام قیمت P پولینوم $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ بالای $(x-13)$ پوره قابل تقسیم می باشد؟

حل:

$$K(13)=3(13)^3-7(13)^2-9(13)+P=6591-1183-117+P=0$$
$$\Rightarrow p=-5291$$

16- اگر پولینوم $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ بالای $(2x+1)$ تقسیم گردد بدون انجام دادن عملیهٔ تقسیم میتوانید بگویید

که باقیمانده چند خواهد بود؟

$a) -3$ $\quad b) -\frac{3}{2}$

$c) 3$ $\quad d) \frac{7}{2}$

حل: جزء a درست است زیرا که:

$$2x+1=0$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$
$$P(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})^2+3(-\frac{1}{2})-1$$
$$=2(-\frac{1}{8})-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=\frac{-1-1-6-4}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

17- قیمت m را، در صورتی دریابید که: اگر پولینوم $P(x)=5x^2+6x-7$ بر $(x+m)$ تقسیم شود باقی مانده (1) باشد.

$a) 2$ $\quad b) -\frac{4}{5}$ $\quad c) -4$ $\quad d)$ a و b درست اند

حل: جزء d درست است؛ زیرا که:

$$P(-m)=5(-m)^2-6m-7=5m^2-6m-7$$
$$5m^2-6m-7=1$$
$$5m^2-6m-8=0$$
$$m=\frac{6\pm\sqrt{36+160}}{10}=\frac{6\pm14}{10}= \begin{cases} 2 \\ -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$m=2$ یا $m=-\frac{4}{5}$

18- اگر پولینوم $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ بالای $(x+3)$ تقسم گردد بدون انجام دادن عملیهٔ تقسیم بگویید که باقیمانده چند می باشد؟

a) صفر $\quad b) 13$ $\quad c) -23$ $\quad d) 7$

حل:

$$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-5(-3)-8$$
$$P(-3)=-27+27+15-8=7$$

چون $R=7$ می‌باشد. جزء d درست است.؛

19- اگر $x=4$, $y=-3$ و $z=2$ باشد، قیمت افاده های الجبری زیر را دریابید.

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$

$b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

حل:

a) $(4)^2(-3)(2) + (2)(4)(-3)^2 + 3(4)(-3)(2)^2 \Rightarrow -96 + 72 - 144 = -168$

b) $\frac{1}{2}(4)^2 - \frac{1}{3}(-3)^2 + \frac{1}{4}(2)^2$

$\frac{1}{2}(16) - \frac{1}{3}(9) + \frac{1}{4}(4)$

$8 - 3 + 1 = 6$

20- توسط تقسیم ترکیبی قیمت های پولینوم های زیر را برای قیمت های داده شد x دریابید.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad :x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad :x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad :x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad :x = -2$

حل:

2	3	−2	5	2
	4	14	24	
2	7	12	29	

$P(2) = 29$

به همین ترتیب اجزای دیگر آن نیز حل می‌شوند.

21- یک،یک جذر معادله های زیر داده شده اند. توسط تقسیم ترکیبی جذر های دیگر این معادله ها را معلوم کنید.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$: یک جذر آن (3) می باشد.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$: یک جذر آن (1-) می باشد.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$: یک جذر آن (1-) می باشد.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$: یک جذر آن (1-) می باشد.

حل:

a)

1	−3	1	−3	3
	3	0	3	
1	0	1	0	

$(x-3)(x^2+1) = 0$

چون $x^2 = -1$ می‌شود در ست اعداد حقیقی جذر ندارد.

به این معنی که معادله یک جذر حقیقی دارد که عبارت از عدد (3) می باشد.

b)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 7 & 13 & -1 \\ & -1 & 6 & -13 & \\ \hline 1 & -6 & 13 & 0 & \end{array}$$

$(x^2 - 6x + 13)(x + 1) = 0$ معادله یک جذر حقیقی دارد که (-1) می باشد.

$c)$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & -1 \\ & -1 & 1 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^3 - x^2 - 4x + 4) = 0$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -4 & 4 & 1 \\ & 1 & 0 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x-1)(x^2-4) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = 0$

در نتیجه جذور معادله عبارت اند از: $x = 2$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -9 & -11 & -4 & -1 \\ & -1 & 2 & 7 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -7 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) = 0$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -7 & -4 & -1 \\ & -1 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & -3 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x+1)(x-4)(x+1) = 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = -1$

22- اگر $P(x) = 0$ باشد درجهٔ پولینوم $P(x)$ چند است؟

a) 1 b) -1 c) صفر d) تعریف نه شده است

حل: جزء d درست است، درجهٔ پولینوم صفری تعریف نشده است.

23- از مساحت مستطیلی که ابعاد آن $(x+5)$ و $(x+2)$ می باشد مساحت مستطیل را تفریق کنید که ابعاد آن $(x+3)$ و $(x+1)$ باشند.

حل:

$$(x+2)(x+5)-(x+1)(x+3)=x^2+7x+10-(x^2+4x+3)$$
$$=x^2+7x+10-x^2-4x-3=3x+7$$

24- اگر $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و $a=13$, $b=5$, $c=12$ و $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ باشد قیمت A را دریابید.

حل:

$$P=\frac{13+5+12}{2}=15$$
$$A=\sqrt{15(15-13)(15-5)(15-12)}=\sqrt{(30)(10)(3)}=\sqrt{900}=30$$

25- اگر $(x-1)^3$ و x^3+ax^2+bx+c پولینوم های معادل باشند قیمت b مساوی است به:

$a)\ 1$ $\quad$ $b)\ 3$

$c)\ -3$ $\quad$ $d)\ -1$

حل: اگر $x^3+ax^2+bx+c=x^3-3x^2+3x-1$ باشد؛ پس ($b=3$) جزء b صحت دارد.

26- حاصل افاده $(a-\dfrac{2}{a-1})\ (a\div\dfrac{a+1}{a-1})$ مساوی است به:

$a)\ a(a+1)$ $\quad$ $b)\ a(a-2)$

$c)\ \dfrac{a-2}{a}$ $\quad$ $d)\ \dfrac{a-1}{a}$

حل: $\dfrac{a(a-1)}{a+1}\cdot\dfrac{a^2-a-2}{a-1}=\dfrac{a(a-1)(a-2)(a+1)}{(a+1)(a-1)}=a(a-2)$ باشد؛ پس جزء b درست است.

27- حاصل ضرب $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ مساوی است به:

$a)\ x^2-y^2$ $\quad$ $b)\ x^2+y^2$ $\quad$ $c)\ 2x^2-y$ $\quad$ $d)\ x-y$

حل: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ ؛پس a درست است.

28- پولینوم های زیر را به طور نزولی (Descending Order) ترتیب و نیز درجه‌های آنها را معلوم کنید.

$a)\ -5x^2+3x^5+9$ $\quad$ $b)\ -x^2+xy^2z^3-x^5$

$c)\ 3$ $\quad$ $d)\ P(x)=0$

$e)\ -4x+2x^3-x^2+7$

حل: $a)\ 3x^5-5x^2+9\ ,\ n=5$ $\quad$ $b)\ -x^5-x^2+xy^2z^3\ ,\ n=5$ $\quad$ $c)\ 3\ ,\ n=0$

29- در پولینوم $Q(x)=x^2+3x-5$ قیمت $Q(-1)$ مساوی است به:

$a)\ 7$ $\quad$ $b)\ -7$

$c)\ 1$ $\quad$ $d)\ -1$

حل: $Q(-1)=(-1)^2+3(-1)-5=1-3-5=-7$؛ پس جزء b درست است.

30- اگر $P(x)=x^2-2x+3$ و $Q(x)=2x^2+3x-1$ باشد قیمت افاده‌های زیر را دریابید:

$P(x)-Q(x)$ $\quad$ $P(0)+Q(0)$ $\quad$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $\quad$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

حل:

$$P(x)-Q(x)=x^2-2x+3-(2x^2+3x-1)=x^2-2x+3-2x^2-3x+1=-x^2-5x+4$$
$$P(x)-P(x)=(x^2-2x+3)-(x^2-2x+3)=0$$
$$P(0)+Q(0)=3-1=2$$
$$[P(x)+Q(x)]+P(x)=3x^2+x+2+x^2-2x+3=4x^2-x+5$$
$$P(1)-Q(-1)=1-2+3-(2-3-1)=2-(-2)=2+2=4$$

31- پولینوم‌های زیر را نظر به y به طور نزولی ترتیب نمایید.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $\quad$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

حل:

$y^3-3xy^2+4x^2y+x^3$ $\quad$ $y^4+4xy^3+2x^2y^2-3x^3y+x^4$

32- در افاده های الجبری زیر، پولینوم‌ها، افاده‌های ناطق و غیرناطق الجبری را نشان دهید.

$13 \quad , \quad \sqrt{2}x \quad , \quad 0 \quad , \quad \frac{3x^2}{2} \quad , \quad \sqrt{x}-\frac{1}{x} \quad , \quad y^2-\frac{1}{y^2}$

حل:

a) $\sqrt{2}\,x$ یک پولینوم است و همچنین یک افادۀ ناطق الجبری نیز می‌باشد.

b) $\frac{3x^2}{2}$ یک پولینوم می‌باشد و افادۀ ناطق الجبری نیز است.

c) 13 یک پولینوم ثابت می‌باشد.

d) 0 پولینوم صفری می‌باشد.

e) $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ یک افادۀ غیر ناطق می‌باشد.

f) $y^2-\frac{1}{y^2}$ پولینوم نمی‌باشد اما افادۀ ناطق الجبری است.

33- حاصل افادۀ $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ مساوی است به:

$a)\ 1$ $\quad$ $b)$ صفر $\quad$ $c)\ -1$ $\quad$ $d)\ 2$

حل:

$1+2x+3x^2+3x-5-2x^2-x^2-5x+4=3x^2-3x^2+5x-5x+5-5=0$؛ جزء b درست است.

34- حاصل ضرب دو افادۀ الجبری $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ می‌باشد. اگر یک افادۀ الجبری $(a+b+c)$ باشد افادۀ دیگری را معلوم کنید.

حل: چون $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ می‌باشد؛ پس افادۀ دیگری عبارت از $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ می‌باشد.

35- خارج قسمت ها را دریابید.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $\qquad$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $\qquad$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\dfrac{x^{a-2}}{x}$ $\qquad$ $\dfrac{-m^a}{m^b}$

حل:

a)

$$\begin{array}{l|l} a^3+b^3 & a+b \\ \underline{-a^3 \quad \pm a^2b} & a^2-ab+b^2 \\ \quad -ab+b^3 & \\ \quad \underline{\mp a^2b \quad \mp ab^2} & \\ \quad ab^2+b^3 & \\ \quad \underline{-ab^2 \quad \pm b^3} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{\pm 12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{\pm 3x^3 \qquad \mp x} & \\ \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ \qquad\quad 2x+2 & \end{array}$$

c)

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 - 10x^2 + 12x + 6 & 2x + 1 \\
\hline
\pm 4x^3 \pm \ 2x^2 & 2x^2 - 6x + 9 \\
\hline
\quad -12x^2 + 12x & \\
\quad \mp 12x^2 \mp 6x & \\
\hline
\qquad\qquad 18x + 6 & \\
\qquad\quad \pm 18x \pm 9 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad -3 &
\end{array}
$$

$d)\qquad \dfrac{a^5 - b^5}{a - b} = \dfrac{(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^2 + b^4)}{(a-b)} = (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^2 + b^4)$

$$
\begin{array}{l|l}
a^5 - b^5 & a - b \\
\hline
_a^5 \ \mp \ a^4b & a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
\hline
\quad a^4b \ \ - b^5 & \\
\quad _a^4b \quad \mp a^3b^2 & \\
\hline
\qquad\qquad a^3b^2 \ \ - b^5 & \\
\qquad\qquad _a^3b^2 \quad \mp a^2b^3 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad a^2b^3 - b^5 & \\
\qquad\qquad\qquad _a^2b^3 \mp ab^4 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad ab^4 - b^5 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad _ab^4 \mp b^5 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$e)\qquad \dfrac{x^{a-2}}{x} = x^{a-2-1} = x^{a-3}$

$f)\qquad \dfrac{-m^a}{m^b} = -m^{a-b}$

36- ضرب کنید.

$(a^{2x} - 2)(a^{2x} - 2)$

$(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$

$(e^x + 1)(e^x - 1)$

$(m^2 - 2n^2)(2m^2 - n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$

$(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

$(a-1)+1-(a-1)-3$

$-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$

$[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$

$10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

حل:

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)=a^{4x}-2a^{2x}-2a^{2x}+4=a^{4x}-4a^{2x}+4$

$(e^x+1)(e^x-1)=e^{2x}-1$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)=0.001x^6$

$(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{16}x+\frac{1}{8}$

$(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)=2m^4-m^2n^2-4m^2n^2+2n^2=2m^4-5m^2n^2+2n^4$

$(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)=(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

37- افاده‌های زیر را ساده و جمع کنید.

حل:

a) $(a-1)+1-(a-1)-3=a-1+1-a+1-3=-2$

b) $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2=-10mn+m-m^2-m+m^2=-10mn$

c) $(y^2-1)+(y^2-1)=2y^2-2$

d) $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]=-4a+4b-5+2a+b-a+b=-3a+6b-5$

e) $10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]=10[-\{-x^2+1+5\}-x^2+2x]$

$=10[x^2-6-x^2+2x]=10[2x-6]\Rightarrow 20x-60$

f) $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)=10x+10-x-1-3x-6=6x+3$

g) $mn-4+mn-5=2mn-9$

38- درجه کدام مونوم (یک حده) داده شدهٔ زیر صفر می باشد.

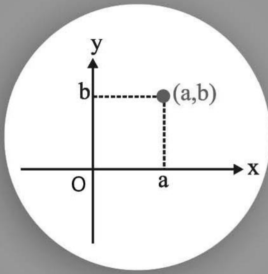
a) x b) $\sqrt{2}x$ c) $\sqrt{2}$

حل: جز c درست است.

فصل دوم
رابطه

$$S \times S = R$$

S	S	R
s_1	s_1	(s_1, s_2)
s_2	s_2	(s_2, s_2)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s_n	s_n	(s_n, s_n)



جوره‌های مرتب و مستوی کارتیزینی

صفحهٔ کتاب درسی: (53)   وقت تدریس: (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی –دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • جوره های مرتب و مستوی کارتیزینی را بشناسند. • بیاموزند که مختصات وضعیه نقاط در کدام ربع مثبت و کدام ربع منفی می‌باشد. • نقاطی که فاصله و ترتیب آنها داده شده باشد در مستوی کارتیزینی تعیین کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت دریافت موقعیت نقاط را درک کنند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کار های گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت، تخته، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی با استفاده از چارت و یا بر روی تخته شرط مساوات جوره-های مرتب توضیح شود، جوره‌های مرتب (x,y) و (a,b) در صورتی مساوی می‌باشند که $x=a$ و $y=b$ و $(a,b)\neq(b,a)$باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

با سهم گیری شاگردان مثال اول حل شود و فعالیت صفحه (53) را شاگردان در گروپ های مناسب حل کنند که جواب آن قرار زیر است:

$(a+1,2b-3)=(0,-1)$

$a+1=0\Rightarrow a=-1$

$2b-3=-1\Rightarrow 2b=2\Rightarrow b=1$

مستوی کارتیزینی، محورهای قایم، مبدأ محورهای کمیات وضعیه در شکل نشان داده شود و جهت‌های مثبت و منفی محورها واضح گردد، بعد نقاط مثال‌های دوم و سوم در شکل تعیین گردد، سپس شاگردان در گروپ‌های مناسب فعالیت صفحه (55) را حل کنند که شکل آن طور زیرمی باشد:

$(2,0),(2,1),(-2,-1),(-1,2),(2,-1)$ و $(0,1)$

تحکیم درس: (7) دقیقه

با سهم گیری شاگردان سؤال اول و دوم تمرین حل شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

بعد از خلص درس، سؤال سوم تمرین از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی

در حالت عمومی

$(a,b) \neq (b,a)$

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow [(a=c) \wedge (b=d)]$

a: اگر $(x-2y, 2x+y) = (3,1)$ باشد قیمت های x و y عبارت اند از:

$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ 4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$

b: اگر دو جوره مرتب $(2, y-1)$ و $(x+3, -3)$ با هم مساوی باشند قیمت های x و y عبارت اند از:

$x=-1$

$y=-2$

c: اگر دو جوره مرتب $(4a+1, 2b+a) = (5, 3a-4b)$ باشد قیمت های a و b عبارت اند از:

$a=1$

$b=3$

d: $(2-3a, 3b-3) = (2b+3, 1+a)$ باشد قیمت های a و b عبارت اند از:

$a=-1$

$b=1$

e: اگر $(-2^n+1, y+1, 2x-3) = (-7, 3n, 5)$ باشد قیمت $2n+y-x$ عبارت است از:

$-2^n+1=-7$	$y+1=3n$	$2x-3=5$
$n=3$	$y=8$	$x=4$

$\Rightarrow 2n+y-x = 6+8-4 = 10$

f: اگر $(3x-2y, 2^{x+y}) = (x, 8^{-2})$ باشد جوره مرتب (x,y) عبارت است از:

$3x-2y = x \Rightarrow 2x = 2y$

$2^{x+y} = 8^{-2} = 2^{-6} \Rightarrow x+y=-6$

از حل این معادله ها داریم که:

$y=-3$ و $x=-3 \Rightarrow (x,y) = (-3,-3)$

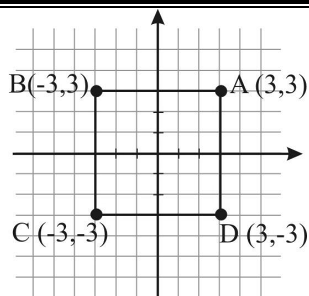
جواب به سؤال های تمرین

1- اگر فاصله نقطۀ p مثبت و ترتیب نقطۀ P منفی باشد، نقطۀ p در کدام ربع واقع است؟

حل: نقطۀ P در ربع چهارم قرار دارد.

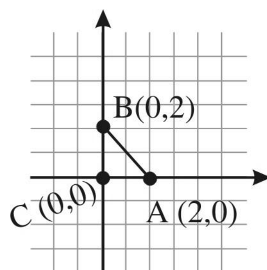
2- اگر چهار رأس یک شکل عبارت از $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ و $D(3,-3)$ باشند، این شکل کدام شکل هندسی می باشد؟

حل: این شکل هندسی مربع می‌باشد.



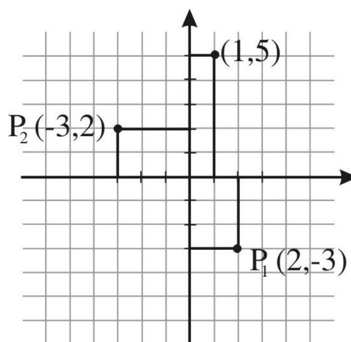
3- مثلثی که سه رأس آن $A(2,0)$, $B(0,2)$ و $C(0,0)$ باشد در مستوی کمیات وضعیه رسم کنید و بگویید که این چه نوع مثلث است؟

حل: این مثلث قایم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌باشد.



4- نقاط $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$ و $P_3(1,5)$ را در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.

حل:

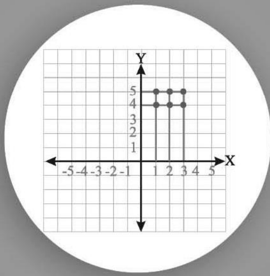


5- بگویید که جوره های مرتب ذیل در کدام ربع واقع اند؟

$(1,5)$, $(-5,1)$, $(-4,-6)$, $(4,-5)$, $(-\frac{1}{2},-2)$

$(-\frac{1}{2},2)$, $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$, $(0,-1)$

حل: $(1,5)$ در ربع اول، $(-5,1)$ در ربع دوم، $(-4,-6)$ در ربع سوم، $(4,-5)$ در ربع چهارم، $(-\frac{1}{2},-2)$ در ربع سوم، $(-\frac{1}{2},2)$ در ربع دوم، $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ در ربع اول نقطه $(2,0)$ بالای محور X و نقطه $(0,-1)$ بالای محور y قرار دارند.



حاصل ضرب کارتیزینی و گراف آن

صفحهٔ کتاب درسی: (57) وقت تدریس: (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی – دانشی – مهارتی – ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق به دست آوردن حاصل ضرب کارتیزینی دو ست را بیاموزند. • تعریف حاصل ضرب کارتیزینی دو ست را بدانند. • تعداد عناصر ست $A \times B$ را تعیین کرده بتوانند. • حاصل ضرب کارتیزینی دو ست A و B را دریافت کرده بتوانند. • حاصل ضرب کارتیزینی دو ست A و B را در شکل نشان داده بتوانند. • در موضوعات ریاضی از این حاصل ضرب استفاده کرده تبوانند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، کار های گروپی، انفردی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت، تخته، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی، با استفاده از چارت و یا از روی تخته سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود؛ اگر جواب را ارائه کرده نتوانستند بعد از حل مثال ها به جواب آن موفق خواهند شد. که جواب آن قرار زیر است: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ $A \times B\{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4)(3,4)\}$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

شاگردان فعالیت اول درس را بعد از حل فعالیت صفحه 58 حل کنند.

با سهم گیری شاگردان بعد از تعریف $A \times B$ مثال اول حل شود، فعالیت صفحه 58 را شاگردان حل کنند که جواب آن چنین می باشد:

$A \times B = \{(-4,1), (-4,4), (-1,1), (-1,4), (0,1)(0,4)\}$

$A \times A = \{(-4,-4), (-4,-1), (-4,0), (-1,-4), (-1,-1)(-1,0), (0,-4), (0,-1), (0,0)\}$

$B \times B = \{(1,1), (1,4), (4,1), (4,4)\}$

بعد مثال های دوم و سوم با سهم گیری شاگردان حل شود. غرض نشان دادن حاصل ضرب $A \times B$ در گراف، مثال-های چهارم، پنجم و ششم کار شود، فعالیت صفحهٔ 59 را شاگردان در گروپ‌ها اجرا کنند، و نمایندهٔ گروپ کار خود را روی تخته در شکل نشان دهد که جواب آن قرار زیر می باشد:

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین صفحهٔ (60) کار شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

اگر $A=\{3,4\}$ و $B=\{0,-1\}$ باشد گراف $A\times B$ را رسم کنید.

معلومات اضافی برای معلم

- حاصل ضرب کارتیزینی دو ست غیر خالی A و B عبارت است از:

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$

- عناصر ست R^2 عبارت از ست تمام نقاطی در مستوی مختصات می باشد طوری که:

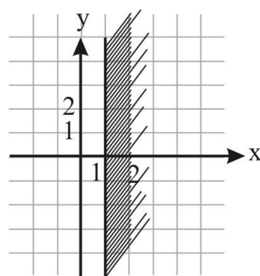
$R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$

- مثال: ست نقاط در ناحیه دوم مستوی مختصات به صورت ضرب دکارتی دو ست چنین نشان داده می شود:

$A=\{x\mid x\in R\ ,\ x<0 \qquad B=\{y\mid y\in R\ ,\ y>0\}$

$A\times B=\{(x,y)\mid x,y\in R \quad , \quad x<0\wedge y>0\}$

- در شکل زیر ناحیهٔ که خط خط شده است گراف حاصل ضرب دکارتی کدام ست ها می باشد.



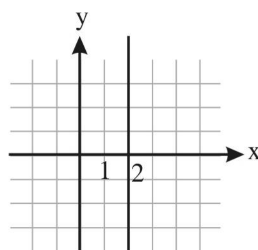
حل:

$A=\{x\mid x\in R\ ,\ x\geq 1\} \qquad B=\{y\mid y\in R\} \qquad A\times B=\{(x,y)\mid x,y\in R, x\geq 1\}$

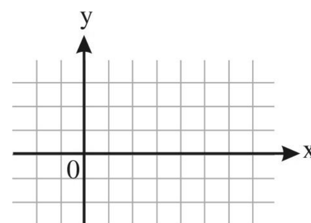
گراف ست های $R\times\{0\}$ و $\{2\}\times R$ طور زیر می باشد:

$R\times\{0\}=\{(x,0)\mid x\in R\} \qquad \{2\}xR=\{(2,y)\mid y\in R\}$

عناصر حاصل ضرب کارتیزینی $R\times\{0\}$ تمام نقاط واقع بالای محور x و عناصر ست $\{2\}\times R$ تمام نقاط واقع بر خط x=2 می باشد.



$\{2\}\times R$



$R\times\{0\}$

- برای هر ست A داریم که: $A\times\phi=\phi$ و $\phi\times A=\phi$ می باشد.

مثال: اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{x,y\}$ باشد:

$A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

$n(A) = 3$

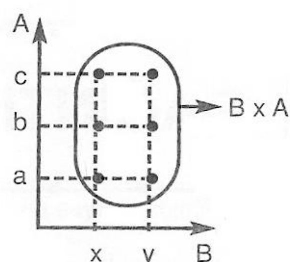
$n(B) = 2$

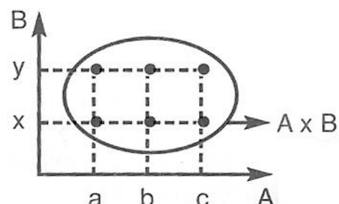
$\Rightarrow n(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$

$B \times A = \{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$

$n(B \times A) = n(B) \cdot n(A) = 2 \cdot 3 = 6$

$n(A \times B) = n(B \times A)$

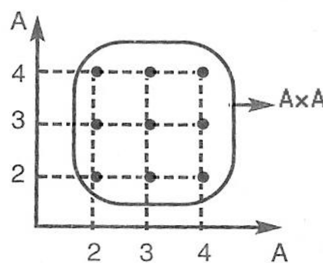




مثال: اگر $A = \{2,3,4\}$ باشد :

$A \times A = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$n(A \times A) = n(A) \times n(A) = 3 \times 3 = 9$



مثال: اگر $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$ و $C = \{1,2,3\}$ باشند:

a: $A \times (B \cup C)$ b: $(A \times B) \cup (A \times C)$

a: $B \cup C = \{1,2,3,4\}$

$A \times (B \cup C) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$

b: $A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$A \times C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

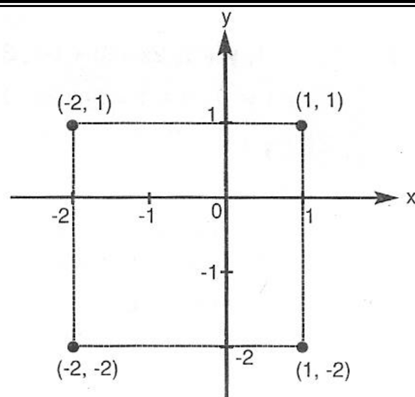
$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$

در نتیجه:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

- اگر $A = \{-2,1\}$ باشد $A \times A$ را در شکل چنین نشان داده می توانیم:

$A \times A = \{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\} = A^2$

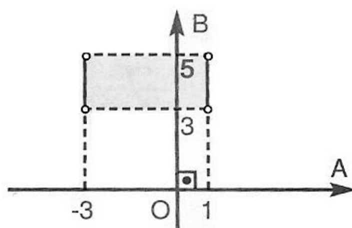


- اگر $A=\{x:|x+1|\le 2, x\in IR\}$ و $B=\{y:|y-4|<1, y\in IR\}$ باشد گراف $A\times B$ عبارت است از:

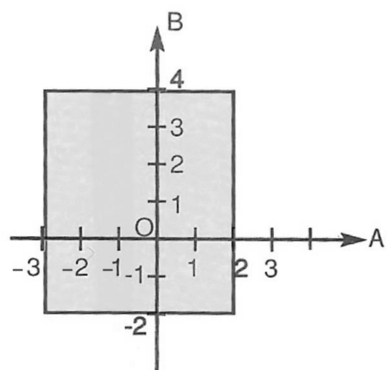
$A=\{x:-2\le x+1\le 2, x\in R\}=\{x:-3\le x\le 1, x\in R\}=[-3,1]$

$B=\{y:-1<y-4<1, y\in R\}=\{y:3<y<5, y\in R\}=(3,5)$

$\Rightarrow A\times B=[-3,1]\times(3,5)$



- اگر $A=[-3,2]$ و $B=[-2,4]$ باشد $A\times B$ در شکل چنین نشان داده می شود.



جواب به سؤال های تمرین

1- اگر:

i) $B=\{2,4\}$ و $A=\{-1,1,3\}$

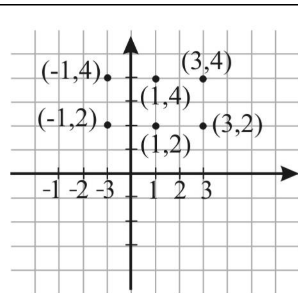
ii) $B=\{2,3\}$ و $A=\{-1,1\}$

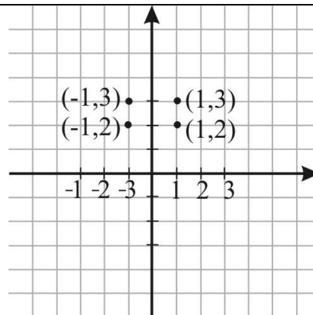
باشد $A\times B$ را دریابید و در شکل نشان دهید.

حل:

i) $A\times B=\{(-1,2),(-1,4),(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$

ii) $A\times B=\{(-1,2),(-1,3),(1,2),(1,3)\}$



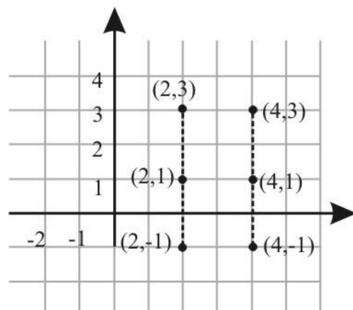


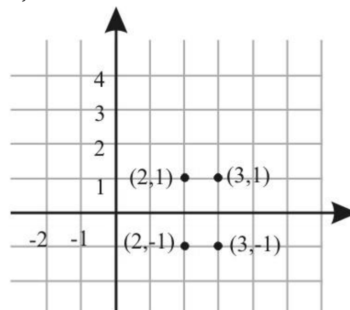
i ii

2- برای ست هایی که در سؤال اول داده شده اند $B\times A$ را دریابید و در شکل نشان دهید.

حل:

$B\times A=\{(2,-1),(2,1),(2,3),(4,-1),(4,1),(4,3)\}$





$B\times A=\{(2,-1),(3,-1),(2,1),(3,1)\}$

3- اگر $A=\{1,2,3\}$ باشد $A\times A$ را دریابید.

حل:

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

4- اگر $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,3,5\}$ باشد $A\times A, B\times A, A\times B$ و $B\times B$ را دریابید.

حل:

$A\times B=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$

$B\times A=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$

$A\times A=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$B\times B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$



رابطه (Relation)

صفحۀ کتاب درسی: (61)   وقت تدریس: (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی – دانشی – مهارتی – ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • تعریف رابطه و رابطۀ معادل را بیاموزند. • ناحیۀ تعریف و ناحیۀ قیمت‌های رابطه ها را دریافت کرده بتوانند. • تعداد رابطه ها در A و از A در B را دریافت کرده بتوانند. • معکوس یک رابطه را دریافت کرده بتوانند و نیز ناحیه تعریف و ناحیه قیمت های آن را تعین کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از رابطه ها و خاصیت های آن استفاد کرده بتوانند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، کار های گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت، تخته، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی (عطاالله Related عزت‌الله) به شکل (عطاالله R عزت‌الله) نشان داده شده است.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

بعد از تعریف رابطۀ مثال های اول، دوم و سوم درس باسهم گیری شاگردان حل شود، بعد فعالیت صفحۀ 62 را شاگردان در گروپ‌های مناسب حل کنند، و استاد محترم متوجه باشد که در این فعالیت اشتباه رخ داده است $R=\{(x,y)\mid x+y=5\}$ علامت مثبت، منفی شده است که جواب آن قرار زیر است:

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$
$$R=\{(x,y)\mid x+y=5\}$$
$$R=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

مثال چهارم حل گردد و ناحیۀ تعریف(Domain) و ناحیه قمیت ها (Range) یک رابطه به شاگردان توضیح گردد و مثال‌های اول و دوم با سهم گیری شاگردان حل شوند.

شاگردان فعالیت صفحۀ 63 را اجرا کنند که جواب آن: $\{0,8,16\}$ =ناحیه قمیت های R می باشد.

رابطۀ معکوس تعریف شود و مثال مربوطه آن نیز حل شود.

رابطۀ معادل و خاصیت های آن تشریح گردد و مثال مربوطه آن نیز حل شود.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین کار شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

سؤال دوم تمرین از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

رابطه دو گانه (Binary Relation):

اگر R یک ست فرعی $A\times B$ باشد؛ پس R به نام رابطه دوگانه از A به B یاد می شود.

مثال: $(a,b)\in R$ که عنصر اول (a,b) به نام Domain که $a\in A$ و عنصر دوم (a,b) به نام Range یاد می گردد که $b\in B$ می باشد.

اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2\}$ باشد؛ پس $R=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ یک رابطه دوگانه از A به B می باشد.

$\text{Domain } R=\{a,b,c\}$ و $\text{Range } R=\{1\}$

همچنین $T=\{(a,a),(a,b),(a,c)\}$ یک رابطه دوگانه در A می باشد.

$\text{Dom}T=\{a\}$ $\qquad$ $\text{Range } R=\{a,b,c\}$

مثال: ناحیه تعریف و ناحیه قیمت های هر یک از رابطه های ذیل که در ست اعداد حقیقی تعریف شده باشد تعین کنید.

- $1+y=-3\Rightarrow y=-3-1\Rightarrow y=-4$

$S=\{(x,y)\mid x,y\in R\wedge y=-4\}$

$Dom\, S=IR$

$Range\, S=\{-4\}$

- $2x+1=7\Rightarrow 2x=7-1\Rightarrow x=3$

$S=\{(x,y)\mid x,y\in R\wedge x=3\}$

$Dom\, S=\{3\}$

$Range\, S=R$

- $x=2y-1$

$S=\{(x,y)\mid x,y\in R\wedge x=2y-1\}$

بعضی از قیمت های این رابطه را در جدول زیر مشاهده کنید.

x	-1	1	3	5	-3	-5	-7	...
y	0	1	2	3	-1	-2	-3	...

$S=\{(-1,0),(1,1),(3,2),(5,3),(-3,-1),(-5,-2),(-7,-3)\}$

$\text{Dom}S=\{-1,1,3,5,-3,-5,-7...\}=R$

$\text{Range}\,S=\{0,\pm1,\pm2,\pm3...\}=R$

- $x^2+y^2=4$

$S=\{(x,y)\mid x,y\in R\wedge x^2+y^2=4\}=\{(2,2),(-2,-2)\}$

$\text{Dom}\,S = \{2, -2\}$
$\text{Range}\,S = \{2, -2\}$

- $9x^2 + 16y^2 = 644$

$S = \{(\pm 4,5), (-4,-5), (4,-5), (-4,5)\}$
$\text{Dom}\,S = \{4, -4\}$
$\text{Range}\,S = \{5, -5\}$

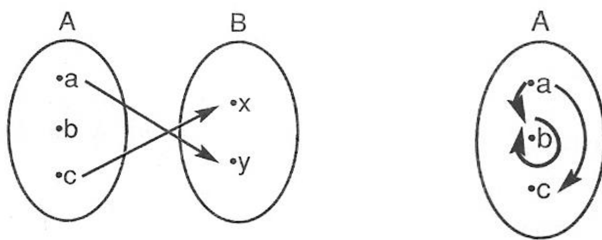
- اگر $A = \{x, y\}$ و $B = \{1,2\}$ باشد:

$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 2 \cdot 2 = 4$

اما تعداد رابطه ها از A به B عبارت است از:

$2^{n(A\times B)} = 2^4 = 16$

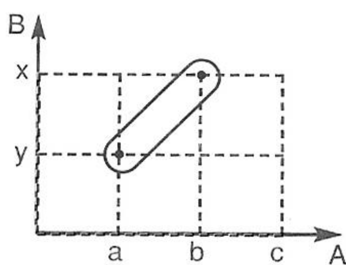
- اگر $\beta \subset A \times B$ و $\beta \subset A \times A$ باشد رابطه β در شکل چنین نشان داده می شود:



- اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = (x, y)$ باشد و نیز $\beta \subset A \times B$ باشد:

$\beta = \{(a, y), (b, x)\}$

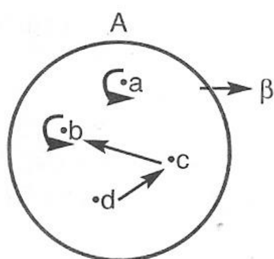
که شکل رابطه β چنین می باشد.

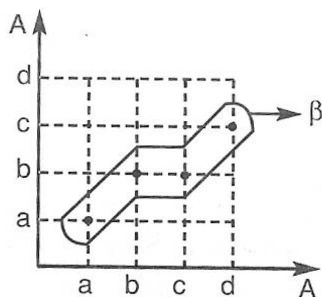


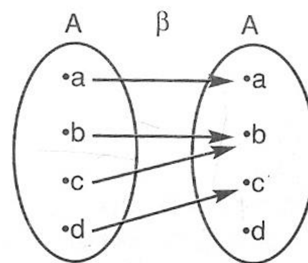
- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و β یک رابطه در A باشد:

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, b), (d, c)\}$

رابطه β را در اشکال زیر مشاهده کنید.







- معکوس یک رابطه: $\beta \subset A \times B \Rightarrow \beta^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \beta\}$

مثال: اگر $A = \{a,b\}$ و $B = (1,2,3)$ باشد و :

$$\beta = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} \Rightarrow \beta^{-1} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

مثال: اگر

$$\beta = \{(x,y) \in R \times R \mid x - y < 2\}$$
$$\beta^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \mid y - x < 2\}$$

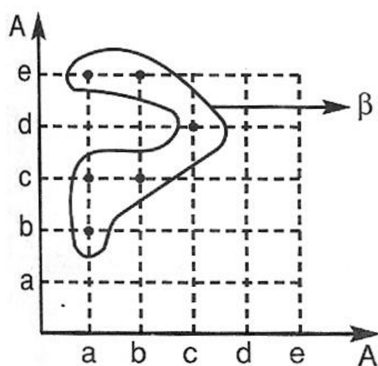
- رابطه $R = \{(x,y) \mid y = 2x+1\}$ در ست اعداد حقیقی تعریف شده است R^{-1} عبارت است از:

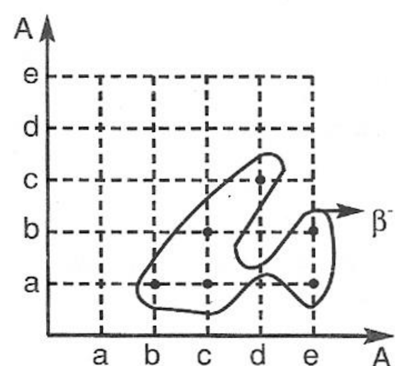
$$y = 2x+1 \Rightarrow y-1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$
$$R^{-1} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R\ , y = \frac{x-1}{2}\}$$

مثال: اگر $A = \{a,b,c,d,e\}$ و β یک رابطه باشد:

β و β^{-1} را در اشکال زیر مشاهده کنید.

$$\beta = \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(c,d)\} \Rightarrow \beta^{-1} = \{(b,a),(c,a),(e,a),(c,b),(e,b),(d,c)\}$$

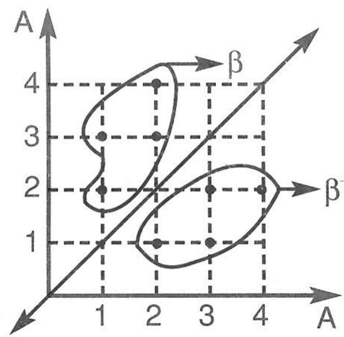




مثال: اگر $A = \{1,2,3,4\}$ و β یک رابطه از A به A باشد:

$$\beta = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\} \Rightarrow \beta^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$$

اشکال βو β^{-1} چنین می باشد.



مثال: اگر رابطه $\beta = \{(x,y) : 3x - y = 4\}$ پس β^{-1} عبارت است از:

$$\beta^{-1} = \{(x,y) : 3y - x = 4\}$$

- رابطه معادل:

رابطه β را در ست A رابطه معادل می گویند طوری که:

1- اگر β در A یک رابطه باشد که برای $\forall x \in A$ داشته باشیم که $(x,x) \in \beta$ باشد. (خاصیت انعکاسی)

2- $\forall (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta$ (خاصیت تناظری)

3- اگر $x,y,z \in A$ باشد $\forall [(x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta] \Rightarrow (x,z) \in \beta$ (خاصیت انتقالی)

مثال: انطباق پذیری مثلث ها در هندسه یک رابطه معادل می باشد.

(خاصیت انعکاسی) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

(خاصیت تناظری) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF} \Rightarrow \overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

(خاصیت انتقالی) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{KLM} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{KLM}$

جواب به سؤال های تمرین

1- اگر $A = \{1,2\}$ و $B = \{0,4,6\}$ باشد:

سه رابطه از A در B بنویسید. چهار رابطه را از B در A بنویسید.

در ست A چهار رابطه را نشان دهید.

حل:

$$\text{i)}\ A \times B = \{(1,0)(1,4)(1,6)(2,0)(2,4)(2,6)\}$$
$$R_1 = \{(1,0)(1,4)\}$$
$$R_2 = \{(1,6)(2,4)\}$$
$$R_3 = \{(2,0)(2,4)(2,6)\}$$

سه رابطۀ فوق از A در B می‌باشند.

چهار رابطه از B در A عبارت اند از:

ii) $B \times A = \{(0,1)(0,2)(4,1)(4,2)(6,1)(6,2)\}$

$R_1 = \{(0,1)(0,2)(4,1)\}$

$R_2 = \{(6,1)\}$

$R_3 = \{(4,1)(4,2)\}$

$R_4 = \{(0,1)(0,2)(4,1)(4,2)(6,1)(6,2)\}$

چهار رابطهٔ درست A عبارت اند از:

iii)

$A \times A = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$

$R_1 = \{(1,1)\}$

$R_2 = \{(1,2)\}$

$R_3 = \{(1,1)(1,2)(2,1)\}$

$R_4 = \{(1,1)(2,1)(2,2)\}$

2- اگر $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,3,5\}$ و $R = \{(x,y) | y < x\}$ یک رابطه از A در B باشد عناصر R را بنویسید.

حل:

$A \times B = \{(1,1)(1,3)(1,5)(2,1)(2,3)(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

$R = \{(2,1),(3,1),(4,1),(4,3)\}$

3- اگر در ست اعداد طبیعی $R = \{(x,y) | y+1 = 2x^2\}$ یک رابطه باشد که ناحیه تعریف (Domain) آن تمام اعداد طبیعی باشد Range آن را تعیین کنید.

حل: چون $R = \{(1,1)(2,7)(3,17)(4,31)(5,49)\ ...\}$ که Range این رابطه عبارت است از:

$\{1,7,17,31,49\ ...\}$

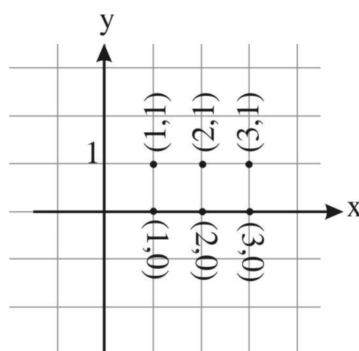
1- اگر $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ باشد $A\times B, B\times A$ و $A\times A$ را دریابید.

حل:

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$
$$B\times A=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$$
$$A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

2- اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{0,1\}$ باشند $A\times B$ را در شکل نشان دهید.

حل: چون $A\times B=\{(1,0)(1,1)(2,0)(2,1)(3,0)(3,1)\}$



3- اگر $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ باشد قیمت های x و y را دریابید.

حل:

$$(x-2y,2x+y)=(3,1)$$

$$\begin{aligned} x-2y&=3 \\ 2x+y&=1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x-4y&=\ \ 6 \\ \pm 2x\pm\ \ y&=\pm 1 \\ \hline -5y&=5 \\ y&=-1 \end{aligned}$$

$$x+2=3$$
$$x=1$$

4- رابطه R را در $A=\{1,3,5\}$ طوری به دست آورید که R رابطهٔ مساوات باشد.

حل: چون $A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ است؛ پس $R=\{(1,1),(3,3),(5,5)\}$ می‌باشد.

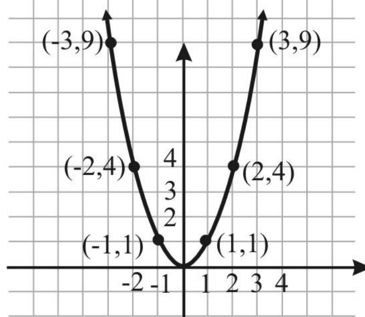
5- اگر $A=\{a,b\}$ باشد عناصر A^2 را بنویسید.

$$A^2=A\times A=\{a,b\}\times\{a,b\}=\{(a,a)(a,b)(b,a)(b,b)\}$$

6- اگر رابطه $R=\{(x,y)\mid y=x^2\}$ در ست اعداد حقیقی تعریف شده باشد گراف رابطه R را ترسیم کنید.

حل: $R=\{(x,y)/y=x^2\}$ گراف رابطه R طور زیر می باشد:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
y	0	1	1	4	4	9	9	...

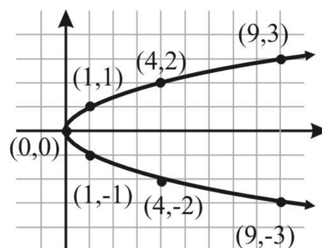


7- اگر رابطه $R=\{(x,y)\mid y^2=x\}$ در ست اعداد حقیقی تعریف شده باشد گراف رابطه R را ترسیم کنید.

حل: $R=\{(x,y)/y^2=x\}$

x	0	1	4	9
y	0	±1	±2	±3

$y=\pm\sqrt{x}$



8- اگر رابطه $R=\{(1,-1)(2,-2)(3,-3)\}$ باشد ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های R^{-1} را مشخص کنید.

حل: $\text{RangeR}^{-1}=\{1,2,3\}$ $\quad$ $\text{DomR}^{-1}=\{-1,-2,-3\}$ می‌باشد.

9- اگر رابطه $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ باشد ناحیهٔ تعیف و ناحیهٔ قیمت های R و R^{-1} را مشخص کنید.

حل:

$Dom_R=\{1\}$ $\quad$ $Range_R=\{2,3,4,5\}$

$Dom\,R^{-1}=\{2,3,4,5\}$ $\quad$ $Range\,R^{-1}=\{1\}$

10- اگر $A=\{3,6,12\}$ و $B=\{-1,0\}$ باشد تعداد رابطه ها را در A و تعداد رابطه ها را از A در B دریابید.

حل: تعداد رابطه‌ها از A در B مساوی است؛ به: $2^{2\times3}=2^6=64$

تعداد رابطه ها در A مساوی است؛ به: $2^{3\times3}=2^9=2^3\cdot2^3\cdot2^3=8\cdot8\cdot8=512$

11- اگر دو جوره مرتب $(4a+1,2b+a)$ و $(5,3a-4b)$ با هم مساوی باشند قیمت های a و b را دریابید.

حل:

$(4a+1,\ 2b+a)=(5,3a-4b)$

$4a+1=5$ $\quad$ $2b+a=3a-4b$

$4a=4$ $\quad$ $2b+1=3-4b$

$a=1$ $\quad$ $6b=2$

$b=\dfrac{1}{3}$

12- اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{x,y\}$ باشد $A\times B$ و $B\times A$ را دریابید.

حل: $B\times A=\{(x,a)(x,b)(x,c)(y,a)(y,b)(y,c)\}$ $\quad$ $A\times B=\{(a,x)(a,y)(b,x)(b,y)(c,x)(c,y)\}$

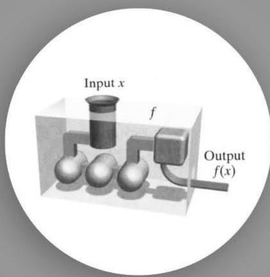
فصل سوم
تابع

$x=0, 1, 2, 3$

Function:

$y = x^3$

$y=0, 1, 8, 27$



تابع(Function)

صفحهٔ کتاب (69)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخیر این درس: • تعریف تابع را بیاموزند و متحول آزاد و متحول مقید را بشناسند. • ناحیهٔ تعریف و نا حیهٔ قیمت‌های توابع را تشخیص کرده بتوانند. • فرق تابع و رابطه را کرده بتوانند. • بیاموزند که چه وقت یک جدول یا ست جوره‌های مرتب یک تابع را نشاند میدهد. • در حل مسایل ریاضی از مفهوم تابع استفاده کرده بتواند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممددرسی	کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت و ... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی، در مورد شکل ورودی پرسیده شود و طوری توضیح گردد؛ که شاگردان تابع را به شکل یک ماشین فکر کنند که(Input) را بحیث متحول آزاد و(output)را بحیث متحول مقید یا مربوط بشناسند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت را می‌توانید که به طور انفرادی از هر شاگرد بپرسید و آنها را همکاری نمایید.

مثال‌های مختلف از توابع در زنده‌گی روزمره، مسایل هندسه، فزیک و غیره داده شوند.

جدول مساحت مربع و جدول نفوس دنیا توضیح گردد و در آن‌ها متحول‌های آزاد و متحول‌های مقید را مشخص کنید، بعد از تعریف تابع،(Domain) و(Range)تابع در ست جوره‌های مرتب نشان داده شود، بعد شاگردان فعالیت صفحهٔ(71) را کار کنند.

معلم محترم باسهم گیری شاگردان مثال اول، دوم و سوم را در چارت‌ها یا روی تخته حل کند، تا شاگردان مفهوم تابع را در جدول، ست جوره‌های مرتب و در دیاگرام‌ها درک کنند:

در صورتی ست جوره‌های مرتب نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد که عناصر اولی آن تکرار نشده باشند و یا برای هر عنصر ست اولی محض یک عنصر در ست دُوم وجود داشته باشد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین را روی تخته بنویسید و حل کنید.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

بعد از خلص درس سؤال دوم تمرین را به طور انفرادی از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

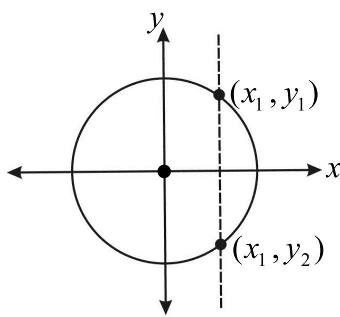
مفهوم تابع اولین بار توسط لایپ نیتز در سال 1696م مطرح شد. یوهان‌برنولی در سال 1718م با تحلیل متحولین، اصطلاح تابع را به کار برد.

اویلر (1707-1783م) در خواص منحنی‌ها، سمبول $F(x)$ را ارائه کرد.

کلیرو در سال 1734م از مفهوم تابع استفاده کرد.

دیریکله(1805-1859م) ناحیه‌های تعریف و ناحیه‌های قیمت‌های تابع را مطرح کرد.

مفهوم عمومی تابع که ست دلخوا برای ناحیه تعریف و ناحیه قیمت ها در نظر گرفته می شود از طرف ریچارد ددکیند (1831-1916) ارائه شد، در حدود سال (1900) برای اولین بار توابع به عنوان ست های از جوره های مرتب (نوع از رابطه) تعبیر شدند.



امروز بسیاری از موضوعات عمدهٔ ریاضی از قبیل لیمت، مشتق، انتیگرال، معادلات تفاضلی، میتودهای محاسبوی وغیره به اساس خواص و تحولات تابع مطالعه می‌شود.

همچنین فورمول‌های فزیک و حوادث طبیعی اکثراً به کمک تابع تشریح و توضیح می‌شوند.

تابع عبارت از ست جوره‌های مرتب می‌باشند که هیچ دو جورهٔ مرتب دارای عناصر اولی مساوی و عناصر دومی مختلف نباشد طوریکه در شکل مشاهده می‌شود (x_1, y_1) و (x_1, y_2) عناصر اولی جوره های مرتب تکرار شده یا برای یک x_1 دو قیمت مختلف y_1 و y_2 وجود دارد.

همچنین خط موازی با محور y گراف را در دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_1, y_2) قطع می‌کند؛ پس این گراف، گراف تابع نمی‌باشد.

- خط مستقیم موازی با محور x یک تابع را نشان میدهد؛ اما خط موازی با محور y که به شکل x=c می باشد یک تابع را نشان نمی دهد و نیز $|y| = 2$ تابع نیست؛ زیرا y می تواند دو قیمت 2 و 2- داشته باشد.
- اگر $f = \{(m,2),(n,p),(m,3a-5)\}$ یک تابع را نشان دهد قیمت a مساوی است به:

$$3a - 5 = 2 \Rightarrow 3a = 5 + 2 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

جواب به سؤال های تمرین

1- کدام یک از جدول های زیر یک تابع رانشان میدهد.

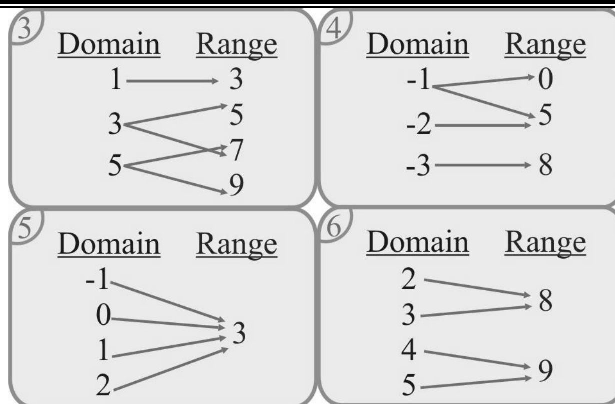
(1)

Domain	Range
-1	1
0	2
1	3

(پیکان‌ها: $-1 \to 3$، $0 \to 2$، $1 \to 1$)

(2)

Domain	Range
2 →	1
4 →	3
6 →	5



حل: جدول‌های 5,2,1 و 6 تابع را نشان میدهد و جدول‌های 3 و 4 تابع را نشان نمی‌دهد.

2- کدام یک از ست های جوره های مرتب زیر یک تابع را نشان میدهد؟ ناحیۀ تعریف (Domain) و ناحیۀ قیمت های (Range) آن ها را تعیین کنید.

$1-\quad \{(2,4)\,,\,(3,6)\,,\,(4,8)\,,\,(5,10)\}$

$2-\quad \{(-1,4)\,,\,(0,3)\,,\,(1,2)\,,\,(2,1)\}$

$3-\quad \{(10,-10)\,,\,(5,-5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

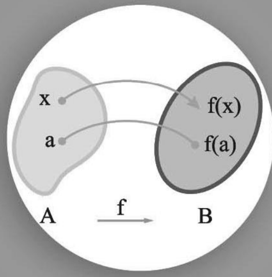
$4-\quad \{(-10,10)\,,\,(-5,5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

$5-\quad \{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

$6-\quad \{(1,1)\,,\,(2,1)\,,\,(3,1)\,,\,(1,2)\,,\,(2,2)\,,\,(3,2)\}$

حل:

- ست جوره‌های مرتب جزء اول تابع را نشان میدهد که ناحیۀ تعریف آن $Dom=\{2,3,4,5\}$ و $Range=\{4,6,8,10\}$ می‌باشد.
- ست جوره‌های مرتب جزء (2) نیز یک تابع را نشان میدهد که ناحیۀ تعریف آن $Dom=\{-1,0,1,2\}$ و $Range=\{4,3,2,1\}$ می‌باشد.
- ست جوره‌های مرتب جزء (3) یک تابع را نشان نمی دهد، یک رابطه می‌باشد که ناحیۀ تعریف آن $Dom=\{10,5,0\}$ و $Range=\{-10,-5,0,5,10\}$ می‌باشد.
- ست جوره‌های مرتب جزء (4) یک تابع را نشان میدهد که: $Dom=\{-10,-5,0,5,10\}$ و $Range=\{10,5,0\}$ می‌باشد.
- ست جوره‌های مرتب جزء (5) یک تابع را نشان میدهد که: $Dom=\{0,1,2,3,4,5\}$ و $Range=\{11,1,2\}$ می‌باشد.
- ست جوره‌های مرتب جزء (6) یک تابع را نشان نمی دهد بلکه یک رابطه را نشان میدهد که: $Dom=\{1,2,3\}$ و $Range=\{1,2\}$ می‌باشد.



طرق نوشتن و قیمت یک تابع

صفحهٔ کتاب (73) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخیر این درس: • طُرق نوشتن یک تابع و طُرق یافتن قیمت یک تابع را بیاموزند. • طُرق مختلف نشان دادن یک تابع را بشناسند. • قیمت‌های توابع مختلف برای قیمت‌های داده شدهٔ x را دریافت کرده بتوانند. • بیاموزند که چه وقت یک معادله یک تابع را نشاند میدهد. • اهمیت یافتن قیمت یک تابع را در حل مسایل ریاضی درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممددرسی	کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌ها مقدماتی غرض ایجاد انگیزه سؤال‌های ورودی از شاگردان پرسیده شود. یک معادله در صورتی نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد که برای هر x یک y وجود داشته باشد، همچنین یک رابطه و یا یک جدول در صورتی نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد که هر عنصر ناحیهٔ تعریف فقط با یک عنصر ست قیمت‌ها ارتباط داشته باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از توضیح طُرق نشان دادن یک تابع، فعالیت را شاگردان اجرا کنند، معلم محترم آنها را نظارت کند، بعد مثال‌های اول و دوم با سهم گیری شاگردان حل شود و فعالیت صفحهٔ(74) یا از شاگردان بطور انفرادی پرسیده شود و یا این که در گروپ‌ها کار کنند و نماینده‌گان گروپ ها کار خود را روی تخته توضیح کنند.

مثال‌های سوم، چهارم و پنجم باسهم گیری شاگردان حل گردد، بعد فعالیت صفحهٔ(76) را شاگردان اجرا کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

اگر $f(x)=3x-1$ و $g(x)=x^2$ باشد؛ $F(0), F(a), F(5a-2), F[F(1)]$ و $g(5p-2)$ را دریابید:

$F(0)=1$ $\quad F(a)=3a-1$ $\quad F[F(1)]=5$

$f(5a-2)=15a-7$

$g(5p-2)=25p^2-20p+4$

ارزیابی درس: (5) دقیقه

بعد از تخلیص درس سؤال دوم تمرین را غرض ارزیابی می‌توانید به طور انفرادی از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

- اگر $F(x)=x^2-4$ و $F(x)=6x+2$ باشد؛ a) $F(x+h)$, b) $F(x+h)-F(x)$ و c) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ عبارت اند از:

a) $F(x+h)=x^2+2xh+h^2-4$ b) $2xh+h^2$ c) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=2x+h$

a) $6x+6h+2$ b) $6h$ c) 6

- در معادلات ذیل کدام یک نشان دهنده یک تابع می باشد؟

$a: \quad 4x-2y^3+5=0$ $b: \quad y^2-x+1=0$

حل:

$a:$

$2y^3=4x+5$

$y^3=2x+\frac{5}{2}$

$y=\sqrt[3]{2x+\frac{5}{2}}$

پس معادله فوق نشان دهنده یک تابع می باشد.

$b: \quad y^2=x-1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x-1}$

که یک تابع نمی باشد برای یک قیمت x دو قیمت y وجود دارد.

طور مثال اگر x=5 باشد y=2 و y=-2 می شود.

- در توابع زیر قیمت $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ را دریابید.

$f(x)=x+1 \quad \to 1$

$f(x)=3x+7 \quad \to 3$

$f(x)=x-x^2 \quad \to -2x-h+1$

$f(x)=\sqrt{x} \quad \to \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

- کدام یک از معادلات ذیل یک تابع را نشان می دهد؟

$1:\ y=3x^2-12$: (یک تابع می باشد)

$2:\ y^2=4x+1$: (y تابع از x نمی باشد)

$3:\ 3x+2y=12$: (یک تابع می باشد)

$4:\ x^2+y^2=9$: (y تابع از x نمی باشد)

- اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد $f(\frac{1}{x})$ عبارت است از:

$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$

به عوض $x+\frac{1}{x}$، $\frac{1}{x}$ را عوض می کنیم:

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^3-3\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

- اگر $f(x)=x^2+2x+3$ باشد $f(2x-1)$ عبارت است از:

$$f(2x-1)=(2x-1)^2+2(2x-1)+3=4x^2+2$$

- اگر $f(2x-3)=x^2-1$ باشد، $f(x)$ عبارت است از:

$$2x-3=t\Rightarrow x=\frac{t+3}{2}\ ,\ f(2x-3)=x^2-1\Rightarrow f(t)=(\frac{t+3}{2})^2-1=\frac{t^2+6t+9}{4}-1$$
$$=\frac{t^2+6t+9-4}{4}=\frac{t^2+6t+5}{4}$$

جواب به سؤال های تمرین

1- اگر $g(x)=x^2+x-2$ و $f(x)=2x^2+3x-1$ باشد $g(2)-g(-3)$, $g(-2),f(-3)$ و $\frac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ را معلوم کنید.

حل:

$$g(-2)=(-2)^2-2-2=4-4=0$$
$$F(-3)=2(-3)^2+3(-3)-1=18-9-1=8$$
$$g(2)-g(-3)=?$$
$$g(2)=2^2+2-2=4$$
$$g(-3)=(-3)^2-3-2=9-5=4$$
$$g(2)-g(-3)=4-4=0$$
$$\frac{F(0)\cdot g(2)}{F(-3)}=\frac{(-1)(0)}{8}=\frac{0}{8}=0$$

2- اگر $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ باشد. $f(-2)$, $g(0)$ و $f(x-1)$ را دریابید.

حل:

$$F(-2)=(-2)^2-(-2)=4+2=6$$
$$g(0)=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$$
$$F(x-1)=(x-1)^2-(x-1)=x^2-2x+1-x+1=x^2-3x+2$$

3- اگر $g(x)=3\sqrt{x}$ و $h(x)=1+4x$ باشد $h(16)$, $h(-3)$ و $g(-4)$ را دریابید.

حل:

$$h(16)=1+4(16)=1+64=65$$
$$h(-3)=1+4(-3)=1-12=-11$$

$g(-4)=3\sqrt{-4}$ (در ست اعداد حقیقی تعریف نشده است)

4- $f(x)=\frac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ و $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ باشـــد. $f(6), g(-7)$ و $f(0)+g(4)-h(-3)$ را دریابید.

حل:

$$F(6)=\frac{15}{6-3}=\frac{15}{3}=5$$

$$g(-7)=16+3(-7)-(-7)^2=16-21-49=16-70=-54$$

$$F(0)+g(4)-h(-3)=?$$

$$F(0)=\frac{15}{0-3}=-5$$

$$g(4)=16+3(4)-4^2=16+12-16=12$$

$$h(-3)=\sqrt{25-(3)^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

$$F(0)+g(4)-h(-3)=-5+12-4=3$$

5- اگر $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ باشد $g(12)$, $g(5)$, $g(4)$, $g(0)$ و $g(-2)$ را در یابید.

حل:

$$g(12)=\sqrt{12+40}-2=\sqrt{52}-2$$

$$g(5)=\sqrt{5+40}-2=\sqrt{45}-2$$

$$g(4)=\sqrt{4+40}-2=\sqrt{44}-2$$

$$g(0)=\sqrt{0+40}-2=\sqrt{40}-2$$

$$g(-2)=\sqrt{-2+40}-2=\sqrt{38}-2$$

6- آیا معادلهٔ $x^2+xy=1$ یک تابع را نشان میدهد؟

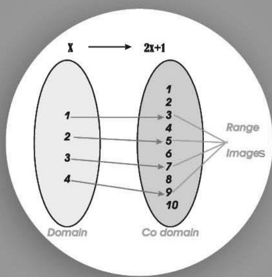
حل:

$$x^2+xy=1$$

$$xy=1-x^2$$

$$y=\frac{1-x^2}{x}=\frac{1}{x}-x$$

چون برای هر x یک قیمت y وجود دارد؛ پس معادلهٔ $x^2+xy=1$ نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد.



یافتن ناحیۀ تعریف یک تابع، گراف تابع و تشخیص تابع از روی گراف آن

صفحۀ کتاب (77)   وقت تدریس(2 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان باید در اخیر این درس:
• طریق یافتن ناحیۀ تعریف یک تابع را بیاموزند.
• طریق تشخیص یک تابع از روی گراف و رسم کردن گراف یک تابع را بیاموزند.
• ناحیه‌های تعریف توابع را دریافت کرده بتوانند.
• گراف‌های توابع را رسم کرده بتوانند.
• گراف تابع را تشخیص کرده بتوانند.
• در حل مسایل ریاضی اهمیت رسم کردن گراف تابع را درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت و ...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت‌های مقدماتی غرض ایجاد انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود؛ چون توابع حقیقی می‌باشد؛ پس در ناحیۀ تعریف هر تابع ست تمام اعداد حقیقی شامل نمی‌باشد؛ طور مثال در ناحیۀ تعریف تابع $F(x)=2x-1$ تمام اعداد حقیقی شامل می‌باشند؛ اما در ناحیۀ تعریف تابع $h(x)=\frac{3}{x-5}$ عدد 5 شامل نیست.</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
فعالیت اول درس می‌شود که به صورت انفرادی از شاگردان پرسیده شوند، استاد محترم راهنمایی کند و مثال اول را با سهم‌گیری شاگردان کار کنید. فعالیت صفحۀ(78) را شاگردان در گروپ‌های مناسب اجرا نموده و نمایندۀ هر گروپ کار خود را به دیگران توضیح نماید، بعد مثال‌های دوم و سوم را باسهم گیری شاگردان حل نمایید. در مورد چهار شکل صفحۀ(79) از شاگردان پرسیده شود، استاد محترم راهنمایی کند، فعالیت صفحۀ(79) را شاگردان اجرا کنند و مثال های اول و دوم را روی تخته یا در یک چارت رسم کنید. فعالیت صفحۀ(81) را شاگردان در گروپ‌ها حل نمایند. گراف‌های مثال‌های سوم و چهارم را یا در چارت و یا روی تخته توضیح نمایید.</td></tr>
<tr><td colspan="2">تحکیم درس: (7) دقیقه
ناحیۀ تعریف $g(x)=-\sqrt{\frac{2}{x^2+9}}$ را تعیین کنید.
حل: ناحیه تعریف تابع g(x) عبارت از تمام اعداد حقیقی یا $Domg(x)=(-\infty,+\infty)$ می باشد.</td></tr>
</table>

ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤالات ذیل از شاگردان بپرسید:

- ناحیهٔ تعریف تابع $F(x)=(3x+5)^{\frac{1}{2}}$ را دریابید.
- ناحیهٔ تعریف تابع $g(x)=x+6$ را دریابید.

معلومات اضافی برای معلم

ناحیهٔ تعریف (Domain) توابع زیر را دریابید.

a) $F(x)=x^4$ b) $F(x)\sqrt{16-x^2}$ c) $F(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

d) $F(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ e) $F(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

حل:

a) $\text{dom}F(x)=(-\infty,+\infty)$ b) $\text{dom}F(x)=[-4,4]$ c) $\text{dom}F(x)=[3,+\infty]$

d) $\text{dom}F(x)=(-\infty,+\infty)$ e) $\text{dom}F(x)=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$

گراف تابع F $=\{(x,y),\ y=F(x),\ x\in Dom_F\}$

- گراف معادلهٔ پارامتریک (Parametric Graphing): در این نوع گراف ها x و y تابع یک متحول سومی مثلا t می باشد که t را پارامتر می گویند این تابع را معادلهٔ پارامتریک می گویند؛ بطور مثال:

$f(t)=(x,y)\qquad x=x(t)\qquad y=y(t)$

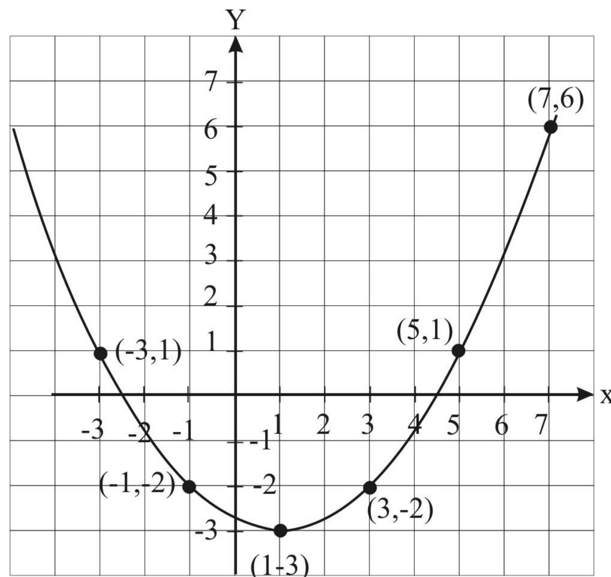
مثال: گراف زیر را رسم کنید.

$x=2t+1$

$y=t^2-3$

حل:

t	$x=2t+1$	$y=t^2-3$	(x,y)
-2	-3	1	$(-3,1)$
-1	-1	-2	$(-1,-2)$
0	1	-3	$(1,-3)$
1	3	-2	$(3,-2)$
2	5	1	$(5,1)$
3	7	6	$(7,6)$



- ناحیهٔ تعریف توابع پولینومی دارای هر درجه یا هر تابع پولینومی که تحت جذر به درجهٔ جذر تاق یا توابع ساین یا کوساین ست تمام اعداد حقیقی می باشد. طور مثال: ناحیهٔ تعریف توابع زیر ست اعداد حقیقی می باشد.

$g(x)=\frac{1}{5}x^4-x^3-|x|$ $\quad P(x)=\sin x-\cos x^2+1$ $\quad h(x)=\sqrt[3]{x-1}$

ناحیهٔ تعریف توابع لوگاریتمی به شکل $f(x)=k\log_v u$ عبارت است از:

$u>0$
$v>0$
$v\neq 1$

طور مثال: ناحیهٔ تعریف تابع $y=2\log_x(x+2)$ عبارت است از:

$x+2>0\Rightarrow x>-2 \quad , \quad x>0 \quad x\neq 1$
$\Rightarrow (0,1)\cup(1,+\infty)$

و ناحیهٔ تعریف تابع $g(x)=\log_{x-1}(9-x^2)$ عبارت است از:

$dom_g=(1,2)\cup(2,3)$

جواب به سؤال های تمرین

1- ناحیه های تعریف (Domain) توابع ذیل را دریابید.

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$ $\quad g(x)=2x-5$ $\quad h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad g(x)=|x-3|$ $\quad h(x)=\frac{3}{x-4}$

$f(x)=\frac{7x}{x^2-16}$ $\quad g(x)=\frac{2}{(x+3)(x-7)}$ $\quad h(x)=\frac{4}{x^2+11x+24}$

$f(x)=\frac{3}{x^2+4}$

حل:

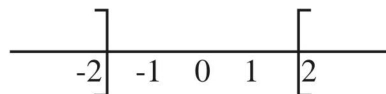
$x^2-9\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2-3^2\geq 0 \;,\; (x-3)(x+3)\geq 0 \;\Rightarrow$

پس ناحیهٔ تعریف این تابع $Dom_f=(-\infty,-3]\cup[3+\infty)$

$g(x)=2x-5 \qquad Dom_g=IR=(-\infty,+\infty)$

$h(x)=\sqrt{x^2-4} \;\Rightarrow\; x^2-4\geq 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2)\geq 0$

$Domh(x)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$



$F(x)=\sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; x+1\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -1$

$DomF(x)=[-1,+\infty) \qquad Dom\,F(x)=\{x\in IR/x\geq -1\}$

$g(x)=|x-3| \;\Rightarrow\; Dom\,g(x)=IR \;\vee\; Dom\,g(x)=(-\infty,+\infty)$

$h(x)=\frac{3}{x-4} \;\Rightarrow\; Dom\,h(x)=IR-\{4\}$

$Dom\,h(x)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

$F(x)=\frac{7x}{x^2-16}=\frac{7x}{(x-4)(x+4)} \qquad Dom\,F(x)=IR\setminus\{-4,4\}$

$DomF(x)\{x\in IR/x\neq -4\wedge x\neq 4\}$ یا

$g(x)=\frac{2}{(x+3)(x-7)} \qquad Domg(x)=IR-\{-3,7\}$

$Domg(x)=\{x\in IR / x\neq -3 \wedge x\neq 7\}$ یا

$h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}=\dfrac{4}{(x+3)(x+8)} \Rightarrow Domh(x)=IR-\{-3,-8\}$

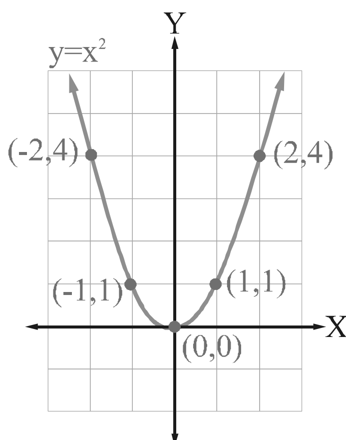
$F(x)=\dfrac{3}{x^2+4} \Rightarrow DomF(x)=IR$ یا $Dom\,F(x)=(-\infty,+\infty)$

زیرا به هیچ قیمت x مخرج تابع صفر نمی‌شود

2- گراف توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=-x^2$ را رسم کنید.

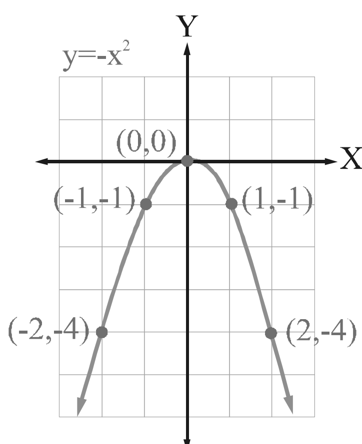
حل: گراف تابع $F(x)=x^2$

x	0	1	−1	2	−2
$f(x)$	0	−1	−1	−4	−4



گراف تابع $f(x)=-x^2$

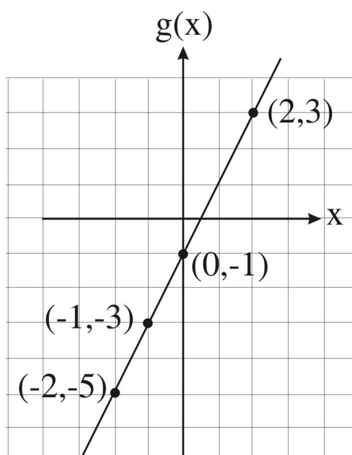
x	0	1	−1	2	−2
$f(x)$	0	−1	−1	−4	−4



3- گراف تابع $g(x)=2x-1$ را رسم کنید، اگر $x=-3\,,-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,,3$ باشد.

حل: گراف تابع $g(x)=2x-1$

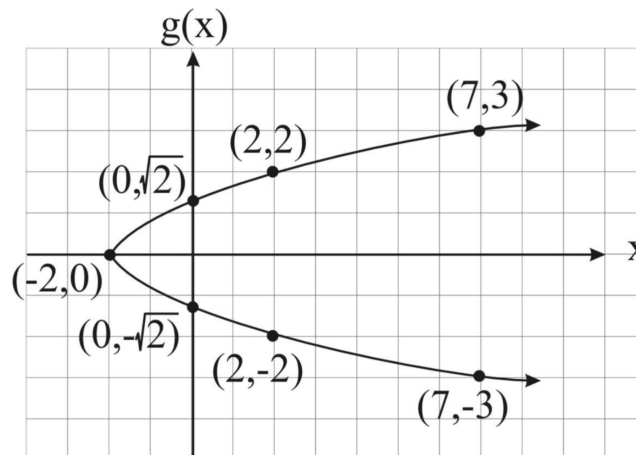
x	0	1	2	3	−1	−2	−3
$g(x)$	−1	1	3	5	−3	−5	−7



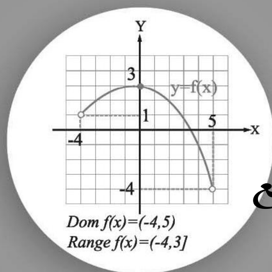
4- گراف $x = y^2 - 2$ را رسم کنید. آیا این گراف، گراف یک تابع می باشد؟چرا؟

حل:

x	0	2	-2	7
y	$\pm\sqrt{2}$	± 2	0	± 3



چون برای یک x دو y وجود دارد؛ پس معادلهٔ $x = y^2 - 2$ یک تابع را نشان نمی‌دهد و از طرفی دیگر خط موازی با محور y این گراف را در دو نقطه قطع می‌کند؛ پس این گراف، گراف یک تابع نمی‌باشد.



دریافت قیمت‌های یک تابع و دریافت
ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع از روی گراف تابع

صفحهٔ کتاب (83) **وقت تدریس(1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• طریق یافتن ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های یک تابع را از روی گراف تابع بیاموزند. • از روی گراف قیمت‌های تابع را دریافت کرده بتوانند. • از روی گراف در قیمت‌های داده شدهٔ x قیمت تابع را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممددرسی	کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت و ... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی غرض ایجاد انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود؛ تا از روی شکل ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع را دریابند: $\text{Dom}\,F(x)=(4,5)$ $\text{Rang}F(x)=(-4,3]$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

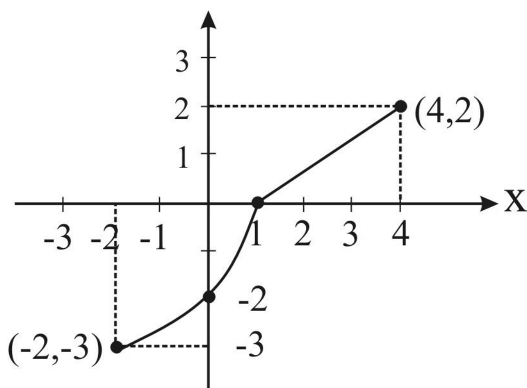
در صورتیکه چارت دو شکل داده شده موجود باشد *Dom* و *Range* در هر دو شکل توضیح گردد؛ بعد فعالیت صفحهٔ(83) را شاگردان اجرا نموده و کار خود را توضیح کنند و باسهم گیری شاگردان مثال‌های اول و دوم اشکال داده شده توضیح گردد، در شکل دوم نقاط تقاطع گراف با محور X معلوم گردد، که $F(3),F(-2)$ و $F(5)$ می‌باشد؛ که $F(5)=F(3)=F(-2)=0$ است.

در اخیر در شکل مثال سوم ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌ها تعیین گردد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

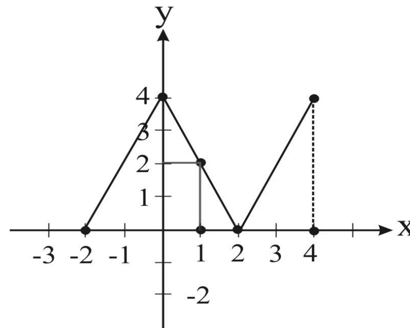
در شکل زیر $F(1),F(0),F(-2)$ و $F(4)$ را دریابید.

$F(-2)=-3$
$F(0)=-2$
$F(1)=0$
$F(4)=2$



ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

در شکل زیر $F(1),F(0),F(-2)$ و $F(4)$ را دریابید.



قیمت‌های $f(1)$, $f(-1)$ و $f(0)$ توابع زیر را دریابید.

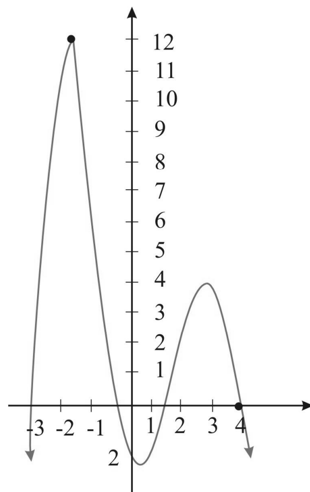
$f(x)=3x^2-5x+1$ $\qquad$ $f(x)=x^2+15x-4$

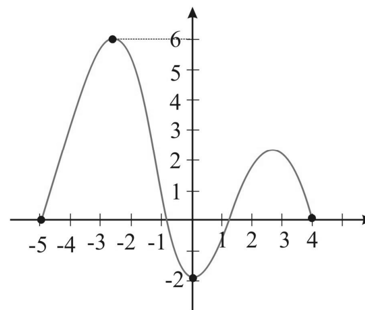
$f(x)=3(x-9)^2$ $\qquad$ $f(x)=2x^3-6x-2$

$f(x)=(x-5)(x+7)$ $\qquad$ $f(x)=-144x^2-64x$

معلومات اضافی برای معلم

- $Dom=(-\infty,+\infty)$ $\quad$ $Range=(-\infty,12]$





$Dom=[-5,4]$ و $Range=[-2,6]$

- دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در صورتی با هم مساوی می باشند که ناحیه های تعریف و ناحیه های قیمت های شان با هم مساوی باشند. طور مثال $f(x)=x^6$ و $g(x)=|x|$ با فرض ناحیهٔ تعریف دو تابع $\{-1,0,1\}$ داریم که: برای $x=-1$ قیمت تابع $f(x)=(-1)^6=1$ و $g(x)=|-1|=1$ می شود.

$f(x)=g(x)$ و برای $x=1$ قمیت توابع $f(x)=1$ و $g(x)=1$ است و برای $x=0$ قیمت توابع $f(x)=0$ و $g(x)=0$ می شود، در نتیجه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در ناحیهٔ تعریف داده شده با هم مساوی اند.

- دو تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$ با هم مساوی نیستند؛ زیرا $domf(x)=R-\{0\}$ و ناحیهٔ تعریف هر تابع ثابت ست اعداد حقیقی می باشد.

• دو تابع $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$ و $g(x)=\cos x$ با هم مساوی نمی باشند؛ زیرا که $D_f=D_g=IR$ ولی $f(x)=|\cos x|$ و $g(x)=\cos x$ است. پس $f(x)\neq g(x)$ می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

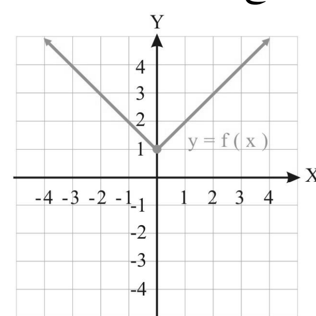
1- در اشکال داده شده:

a) ناحیهٔ تعریف تابع

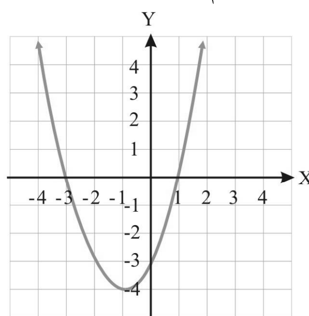
b) ناحیهٔ قیمت های تابع

c) نقاط تقاطع با محور x

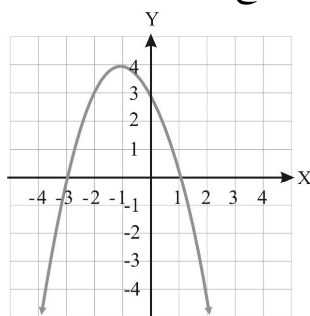
d) نقاط تقاطع گراف با محور y و در شکل سوم قیمت های خواسته شده تابع را دریابید.



(3)



(1)



(2)

در شکل اول:

a) ناحیهٔ تعریف شکل اول تمام اعداد حقیقی یا $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد.

b) ناحیهٔ قیمت های تابع شکل(1) $[-4,+\infty)$ می‌باشد.

c) گراف محور X را در نقاط $(1,0)$ و $(-3,0)$ قطع می کند.

d) محور y را در نقطهٔ $(0,-3)$ قطع کرده است.

در شکل دوم:

a) ناحیهٔ تعریف تابع ست تمام اعداد حقیقی یا $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد.

b) ناحیهٔ قیمت‌های تابع $(-\infty,+4]$ یا $\{y\in IR/y\leq 4\}$ می‌باشد.

c) محور X را در نقاط $(1,0)$ و $(-3,0)$ قطع کرده است.

d) محور y را در نقطه $(0,3)$ قطع کرده است.

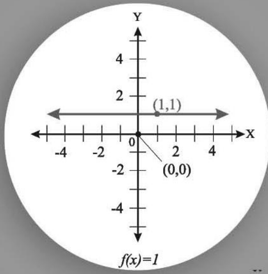
در شکل سوم:

a) ناحیهٔ تعریف تابع ست تمام اعداد حقیقی می‌باشد.

b) ناحیهٔ قیمت‌های تابع $[1,\infty)$ می‌باشد یا $\{y\in IR/y\geq 1\}$است.

c) محور X را قطع نمی کند.

d) محور y را در نقطهٔ $(0,1)$ قطع می‌کند. $F(3)=4$ و $F(-1)=2$

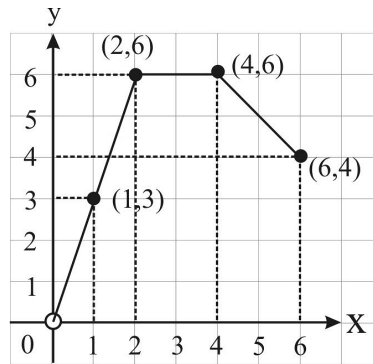


بعضی توابع خاص

صفحهٔ کتاب (87) وقت تدریس(2 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان باید در اخیر این درس:
• تعریف‌های تابع ثابت، تابع عینیت، تابع قیمت‌مطلقه، را بیاموزند.
• گراف‌های تابع ثابت، تابع عینیت، تابع قیمت مطلقه و تابع چندمعادله‌یی را رسم کرده بتوانند.
• از روی گراف نوعیت تابع را تشخیص کرده بتوانند.
• در حل مسایل ریاضیکی از این توابع استفاده کرده بتوانند و اهمیت آنرا درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممددرسی</td><td>کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت و ... .</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت‌های مقدماتی در صورتیکه چارت‌های گراف‌های ورودی(گراف تابع ثابت، گراف تابع قیمت مطلقه و گراف تابع عینیت) موجود باشد. از شاگردان در مورد پرسیده شود.</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
فعالیت صفحهٔ(87) را شاگردان اجرا کنند، سپس تابع ثابت تعریف شود، مثال اول را با سهم گیری شاگردان حل و گراف‌های آن‌ها را رسم کنید، بعد از تعریف تابع عینیت و تابع قیمت مطلقه مثال‌های آن کار شوند.
مثال اول تابع چند معادله‌یی حل شود و فعالیت صفحهٔ(90) را شاگردان کار کنند، بعد استاد محترم گراف تابع چند معادله‌یی را رسم کند و فعالیت صفحهٔ(91) توسط شاگردان اجرا شود، بعد از تعریف تابع علامه (signFunction) گراف آن را رسم کنید.</td></tr>
<tr><td colspan="2">تحکیم درس: (7) دقیقه
سؤال اول تمرین درس حل شود.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ارزیابی درس: (5) دقیقه
غرض ارزیابی سؤال دوم تمرین از شاگردان پرسیده شود.</td></tr>
<tr><td colspan="2">معلومات اضافی برای معلم
• گراف تابع چند معادله‌یی زیر را رسم کنید:</td></tr>
</table>

$$F(x)=\begin{cases}3x & : 0<x\le 2\\ 6 & : 2<x\le 4\\ -x+10 & : 4<x\le 6\end{cases}$$



- هرگاه ناحیه تعریف یک تابع توسط چند ست جدا تقسیم شده باشد طوری که اتحاد این مجموعه ها مساوی با ناحیه تعریف تابع باشد و روی محور هر مجموعه توسط معادله جداگانه تعریف شده باشد در این صورت تابع چند معادله یی به دست می آید یعنی:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & : \quad x\in D_1\\ f_2(x) & : \quad x\in D_2\\ \vdots & \qquad \vdots\\ f_n(x) & \qquad x\in D_n\end{cases}$$

$$\forall_i \in N : D_i \cap D_j=\phi \qquad\qquad D_1\cup D_2\ldots\cup D_n=D_f$$

مثال: تابع f طور زیر تعریف شده است گراف آن را رسم کنید ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های تابع را نیز تعیین کنید.

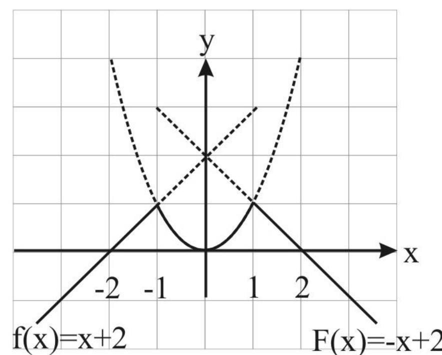
$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1\le x\le 1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

حل:

x	2	3	4
f(x)	0	−1	−2

x	−2	−3	−4
f(x)	0	−1	−2

x	0	1	−1
f(x)	0	1	1



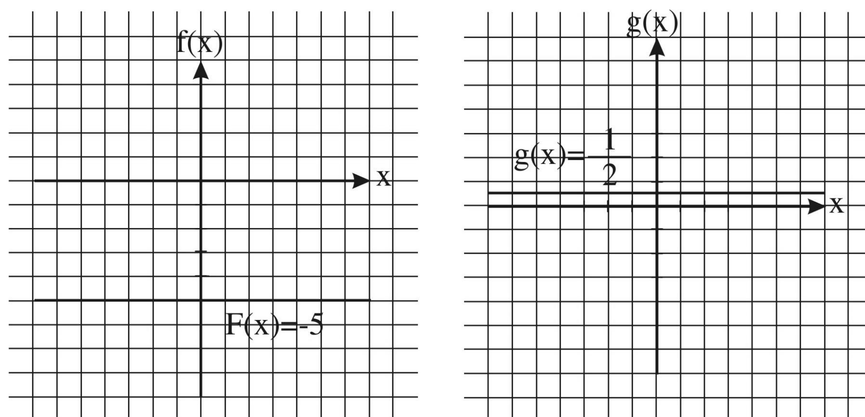
- آیا رابطه $\begin{cases}2 & , \quad x\ge 1\\ x-1 & , \quad x<2\end{cases}$ یک تابع را نشان می دهد؟

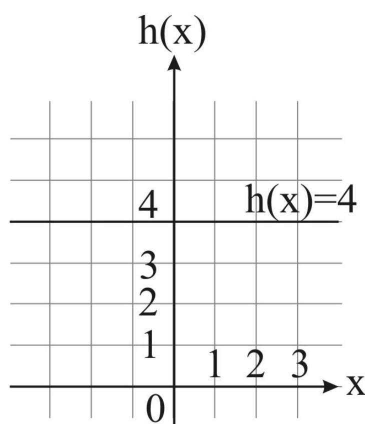
حل: این رابطه یک تابع نمی باشد؛ طور مثال اگر $x=1.5$ باشد از معادلهٔ اول y=2 و از معادلهٔ دوم $y=\frac{1}{2}$ به دست می آید، بدین معنی که برای یک x دو y وجود دارد.

جواب سؤال های تمرین

1- گراف توابع $f(x) = -5$, $g(x) = \frac{1}{2}$ و $h(x) = 4$ را رسم کنید.

حل:

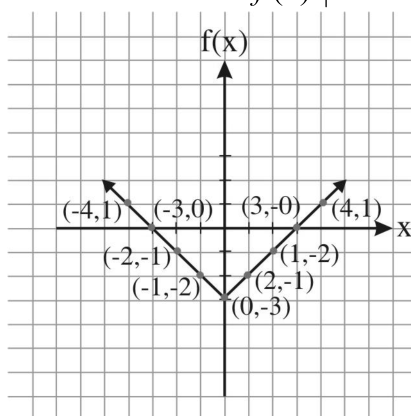




2- گراف تابع $f(x) = |x| - 3$ را رسم کنید.

حل:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
$f(x)$	−3	−2	−2	−1	−1	0	0



3- اگر $f(x) = \begin{cases} -x \Leftarrow x < 0 \\ x \Leftarrow x \geq 0 \end{cases}$ باشد $f(16), f(-3.2), f(0)$ را دریابید.

حل:

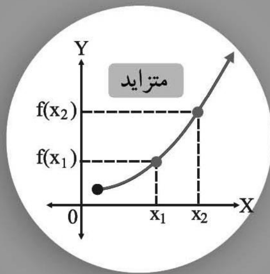
$F(0)=0$

$F(-3.2)=-(-3.2)=3.2$

$F(16)=16$

4- اگر $h(x)=\begin{cases} x+1 \Leftarrow -1\le x<0 \\ -x+1 \Leftarrow 0\le x\le 1 \end{cases}$ باشد ساحهٔ تعریف $h(x)$ را تعیین کنید.

حل: $Dom\, h(x)=[-1,1]$



توابع متزاید و متناقص

صفحهٔ کتاب (93) **وقت تدریس(1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• تعریف توابع متزاید و متناقص را بدانند. • تعریف توابع جفت و طاق را بدانند. • از روی گراف تابع تشخیص کرده بتوانند که گراف تابع در کدام قسمت متزاید و در کدام قسمت متناقص می‌باشد. • از روی شکل گراف تابع تشخیص کرده بتوانند؛ که تابع جفت است یا طاق. • در حل مسایل ریاضی اهمیت توابع متزاید و متناقص را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممددرسی	کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت و ... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی در صورتیکه چارت‌های سه شکل صفحهٔ(93) موجود باشد و یا روی تخته رسم شده باشند از شاگردان سؤال ورودی پرسیده شود، شکل اول گراف تابع متزاید، و شکل دوم گراف تابع متناقص و سومی نه متزاید و نه متناقص(تابع ثابت) است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از تعریف توابع متزاید و متناقص مثال $F(x)=x^2$ و $F(x)=-x^2$ را از روی شکل توضیح گردد که در کدام انتروال‌ها توابع متزاید و در کدام انتروال‌ها توابع متناقص می‌باشد.

فعالیت صفحهٔ(94) را شاگردان اجرا کنند استاد محترم آنها را رهنمایی کند بعد از تعریف توابع جفت و طاق مثال‌های اول و دوم را در صورتیکه چارت اشکال موجود باشد و یا به روی تخته رسم شده باشند استاد محترم توضیح نمایند. مثال سوم را که غرض درک دقیق تابع طاق آورده شده است استاد محترم حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

کدام یک از توابع زیر جفت، طاق و نه جفت و نه طاق می‌باشد؟

$F(x)=x^2$ یک تابع جفت می‌باشد.

$F(x)=x^4+x^2+5$ یک تابع جفت می‌باشد.

$F(x)=2x+3$ نه جفت است و نه طاق.

$F(x)=\dfrac{2}{x-6}$ نه جفت است و نه طاق .

ارزیابی درس: (5) دقیقه

بعد از خلص درس سؤال اول تمرین از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

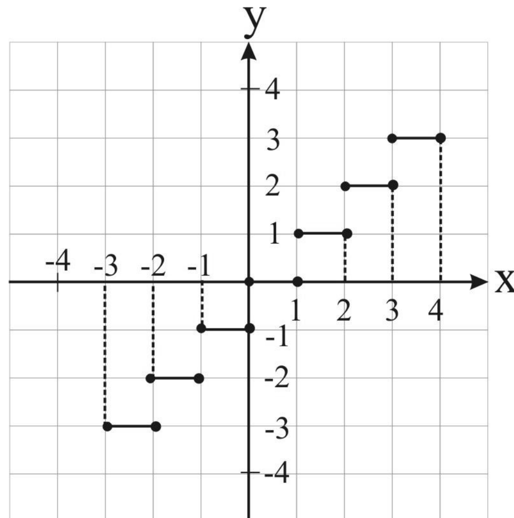
- اگر گراف تابع نظر به محور Y متناظر باشد، تابع جفت و اگر نظر به مبدأ کمیات وضعیه متناظر باشد تابع طاق می باشد در غیر آن تابع نه جفت است و نه طاق.

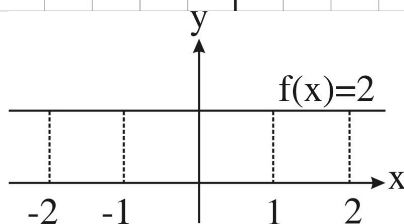
تابع ثابت همیشه جفت می‌باشد و تابع $F(x)=0$ هم جفت است و هم طاق.

- تابع $F(x)=[x]$ به نام تابع بزرگترین عدد تام یاد می‌شود، که عددی را نشان میدهد کوچکتر یا مساوی به x می‌باشد؛ طور مثال: $[8.4]=8$, $[-5]=-5$, $[-6.9]=-7$, $[\pi]=3$ وغیره.

گراف تابع $f(x)=[x]$ در انتروال $(-3,3)$ رسم شده که در هیچ انتروال این تابع نه متزاید است ونه متناقص.

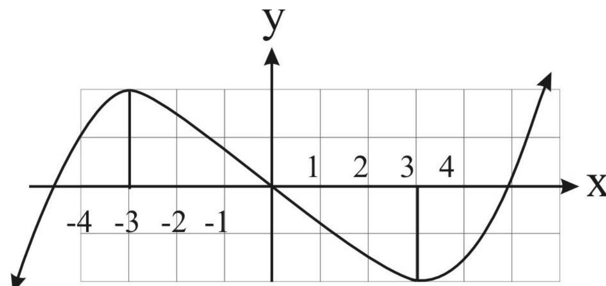
همچنین توابع ثابت نه متزاید است و نه متناقص می باشند؛ مثال: $F(x)=2$

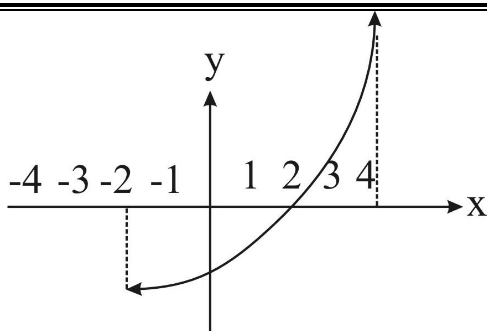




- توابع زیر در کدام قسمت متزاید و در کدام قسمت متناقص می‌باشد.

در انتروال $(-\infty,-3]$ و در انتروال $[3,+\infty)$ متزاید و در انتروال $[-3,3]$ متناقص می‌باشد.





در انتروال $(-\infty,+\infty)$ متزاید است هیچ وقت متناقص نمی‌باشد.

- $y=-4x+2 \longrightarrow$ در انتروال $(-\infty,+\infty)$ متناقص می‌باشد.

$y=x^2+4 \longrightarrow$ در انتروال $[0,+\infty)$ متزاید و در انتروال $(-\infty,0]$ متناقص می‌باشد.

$y=-|x+2| \longrightarrow$ در انتروال $(-\infty,-2]$ متزاید و در انتروال $[-2,+\infty)$ متناقص می‌باشد.

$y=x+|x| \longrightarrow$ در انتروال $[0,\infty)$ متزاید می‌باشد.

تابع جفت و طاق

1- تابع f به نام تابع جفت یاد می‌شود اگر برای هر $x \in D_f$ عدد $-x$ نیز در ناحیهٔ تعریف F شامل بوده و رابطه $f(-x)=f(x)$ را صدق کند.

2- تابع f طاق می‌باشد اگر برای $x \in D_f$ عدد $-x$ نیز در ناحیهٔ تعریف تابع شامل بوده و رابطه $f(-x)=-f(x)$ را صدق کند؛ طور مثال: تابع $F(x)=3x^2$ یک تابع جفت و تابع $g(x)=x^3+9x$ یک تابع طاق می‌باشد.

3- تابع $F(x)=0$ هم طاق است و هم جفت؛ زیرا $F(-x)$ نیز صفر می‌شود.

4- مجموع الجبری چند تابع طاق، طاق و مجموع چند تابع جفت، جفت می‌باشد.

5- حاصل جمع و حاصل تفریق تابع طاق و جفت نه طاق است و نه جفت.

6- ترکیب دو تابع طاق، تابع طاق، اما ترکیب دو تابع جفت و یا یک تابع طاق و دیگری جفت تابع جفت می‌باشد.

7- مشتق و انتیگرال هر تابع طاق، تابع جفت می باشد و مشق هر تابع جفت تابع طاق می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- کدام یک از توابع ذیل متزاید ، متناقض ونه متزاید و نه متناقص می باشد؟

$$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$$

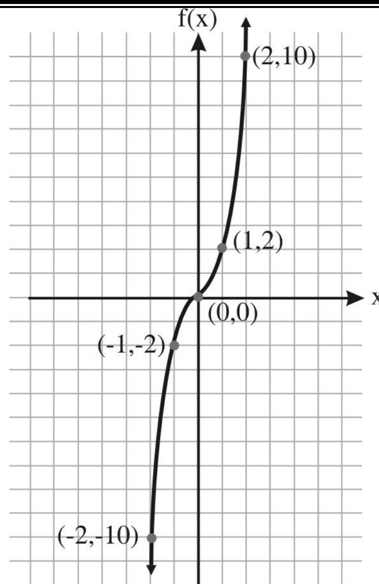
حل: در تابع $f(x)=x^3+x$ اگر $x_1=2$ و $x_2=3$ باشد؛ پس:

$$F(2)=2^3+2=8+2=10$$
$$F(3)=3^3+2=27+2=29$$

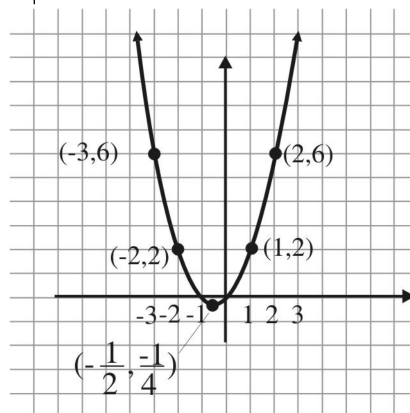
چون $F(x_1)<F(x_2)$ می‌باشد یا $10<29$ است؛ پس تابع $f(x)$ در انتروال $(-\infty,+\infty)$ متزاید می‌باشد.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-2	0	2	10

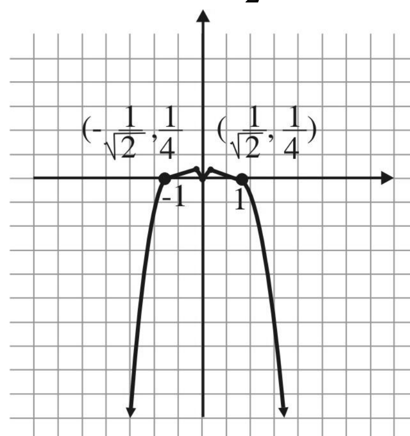
تابع $F(x)=x^2+x$



x	0	1	2	-1	$-1/2$	-2	-3
$f(x)$	0	2	6	0	$-1/4$	2	6



تابع در انتروال $(-\infty,-\frac{1}{2})$ متناقص و در انتروال $(-\frac{1}{2},\infty)$ متزاید می‌باشد.



تابع $F(x)=x^2-x^4$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
f(x)	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0

تابع در انتروال $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ متزاید و تابع در انتروال $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ متناقص و تابع در انتروال $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ متزاید و در انتروال $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ متناقص می‌باشد.

2– کدام یک از توابع زیر داده شده جفت و کدام یک طاق می باشد؟

$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x| \quad , \quad f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$

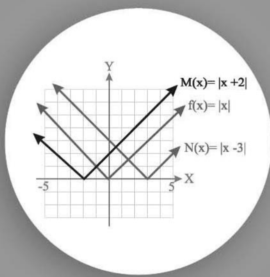
حل: تابع $F(x)=x$

تابع $F(x)$ طاق می‌باشد $F(-x)=-x$

جفت است $F|-x|=|-x|=x=|x|$ $\qquad F(x)=|x|$

پس این تابع جفت می باشد $F(-x)=(-x)^4=x=F(x)$ $\qquad F(x)=x^4$

$F(-x)=(-x)^5=-x=-f(x)$ $\qquad F(x)=x^5$ پس یک تابع طاق می‌باشد.



انتقال(Translation)

صفحهٔ کتاب (97)　　　وقت تدریس(2 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان باید در اخیر این درس:
• مفهوم انتقال گراف را بدانند.
• تعریف انتقال عمودی و انتقال افقی را بفهمند.
• از روی گراف یک تابع گراف های منتقله را رسم کرده بتوانند.
• فرق بین انتقال عمودی و افقی را بدانند.
• ترکیب انتقال عمودی و افقی را درک کنند.
• در ترسیم گراف‌ها از انتقال و ترکیب انتقال‌ها استفاده کرده بتوانند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته ، چارت و... .</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت‌های مقدماتی در صورتیکه چارت یا شکل ورودی درس روی تخته رسم شده باشد در مورد سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود تا شاگردان به فکر کردن وا دار شوند درشکل اولی گراف تابع قیمت مطلقه سه واحد به طرف راست و دو واحد به طرف چپ به طور افقی انتقال کرده است و در شکل دومی گراف تابع قیمت مطلقه به طور افقی به طرف راست 4 واحد انتقال کرده است.</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
فعالیت اولی صفحهٔ(97) این درس را شاگردان در گروپ‌ها کار کنند و استاد محترم آنها را رهنمایی کند بعد از تعریف انتقال عمودی مثال‌های اول و دوم باسهم گیری شاگردان حل شود در صورتیکه چارت‌های اشکال موجود باشد و یا روی تخته رسم شوند، بعد از تعریف انتقال افقی(Horizitan Transalation) مثال سوم حل شود و فعالیت دوم صفحهٔ(100) را شاگردان اجرا کنند.
استاد محترم کوشش کند تا در وقت کار کردن از گروپ‌ها نظارت به عمل آورد تا تمام شاگردان با مشورت با یکدیگر سهم فعال داشته باشند و در صورتی که به مشکل روبرو می‌شوند آنها را رهنمایی کنند.
غرض وضاحت ترکیب انتقال عمودی و افقی گراف مثال‌های چهارم و پنجم را استاد محترم کار کند.</td></tr>
<tr><td colspan="2">تحکیم درس: (7) دقیقه
از انتقال گراف تابع $F(x)=|x|$ گراف تابع $g(x)=3|x|-1$ را رسم کنید.</td></tr>
</table>

x	$f(x)=\|x\|$	$g(x)=3\|x\|-1$
-2	2	$3\|-2\|-1=5$
-1	1	$3\|-1\|-1=2$
0	0	$3\|0\|-1=-1$
1	1	$3\|1\|-1=2$
2	2	$3\|2\|-1=5$

استاد محترم این گراف را رسم کند.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی می‌توانید که قسمتی از سؤال اول را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

1- کش شدن و انعکاس گراف به طور افقی و عمودی با فرض $c>1$:

- گراف $y=cf(x)$ از کش شدن گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ عامل c به طور عمودی به دست می‌آید.
- گراف تابع $y=(\frac{1}{c})f(x)$ از فشردن گراف تابع $y=f(x)$ به اندازه عامل c به طور عمودی به دست می‌آید.
- گراف تابع $y=f(cx)$ از فشردن گراف تابع $y=f(x)$ به طور افقی به اندازهٔ عامل ضربی c به دست می‌آید.
- گراف تابع $y=f(\frac{x}{c})$ از کش شدن تابع $y=f(x)$ به طور عمودی به اندازه عامل ضربی به دست می‌آید.
- گراف تابع $y=-f(x)$ از انعکاس گراف تابع $y=f(x)$ به اطراف محور x به دست می‌آید.
- گراف تابع $y=f(-x)$ از انعکاس گراف $y=F(x)$ به اطراف محور y به دست می‌آید.

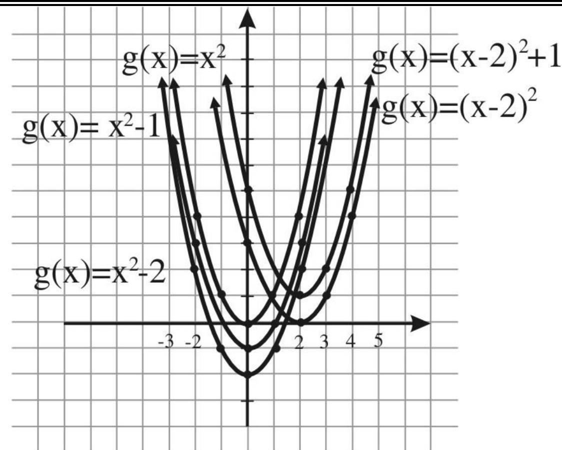
جواب به سؤال های تمرین

1- از انتقال گراف تابع $y=x^2$ گراف های توابع ذیل را رسم کنید.

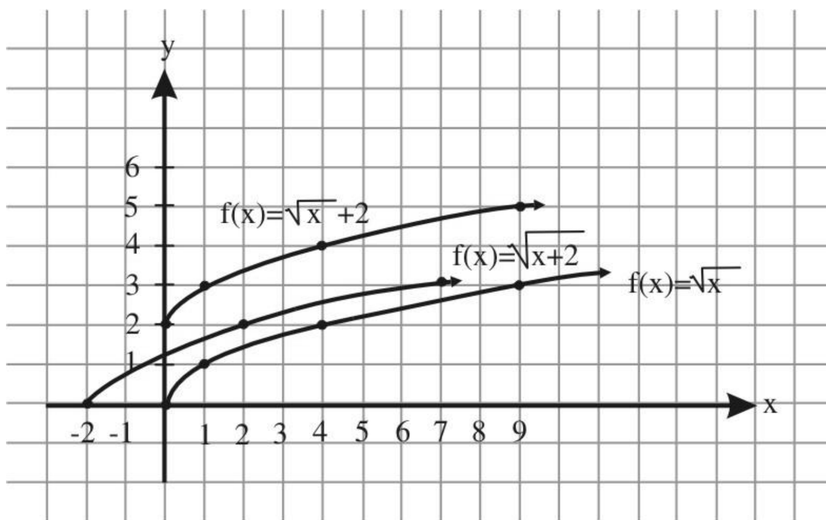
$g(x)=x^2-2$, $g(x)=(x-2)^2$, $g(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-2)^2+1$

حل:

x	$y=x^2$	$g(x)=x^2-2$	$g(x)=(x-2)^2$	$g(x)=(x-2)^2+1$	$g(x)x^2-1$
0	0	-2	4	5	-1
1	1	-1	1	2	0
-1	1	-1	9	10	0
2	4	2	0	1	3
-2	4	2	16	17	3
3	9	7	1	2	8
4	16	14	4	5	15



2– گراف تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید و از انتقال آن گراف های توابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $f(x)=\sqrt{x}+2$ را رسم کنید.



$F(x)=\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

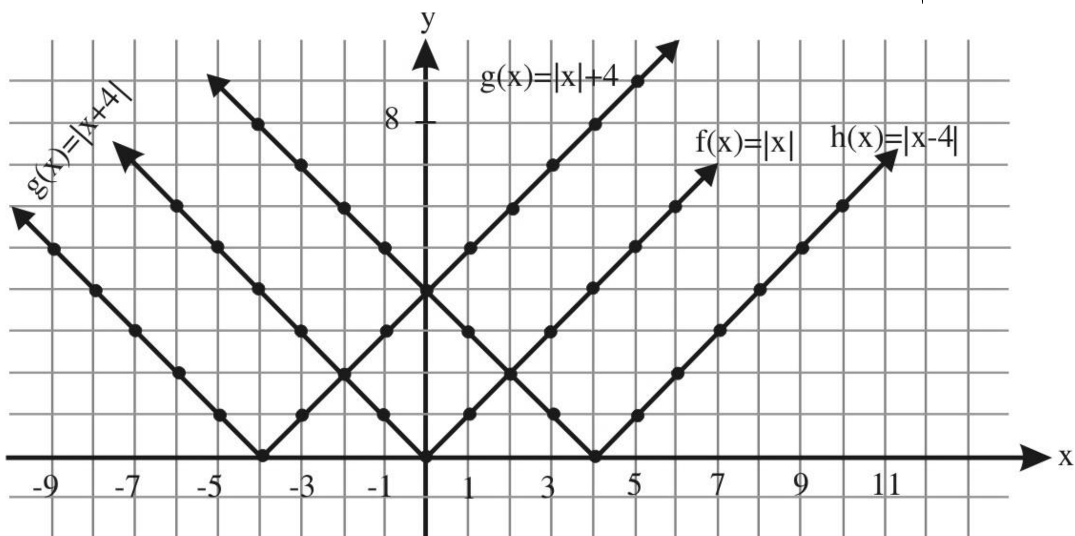
$F(x)=\sqrt{x+2}$

x	-2	2	7
f(x)	0	2	3

$F(x)=\sqrt{x}+2$

x	0	1	4	9
f(x)	2	3	4	5

3: گراف تابع $f(x)=|x|$ را رسم کنید و از انتقال این گراف، گراف های توابع $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ و $h(x)=|x-4|$ را رسم کنید.



x	0	1	3	5	-1	-2	-3
$f(x)=\|x\|$	0	1	3	5	1	2	3

x	0	1	−1	2	−2	3
|x|+4	4	5	5	6	6	7

x	0	1	6	9
|x − 4|	4	3	2	5

x	0	−1	1	−2	−6
|x + 4|	4	3	5	2	2

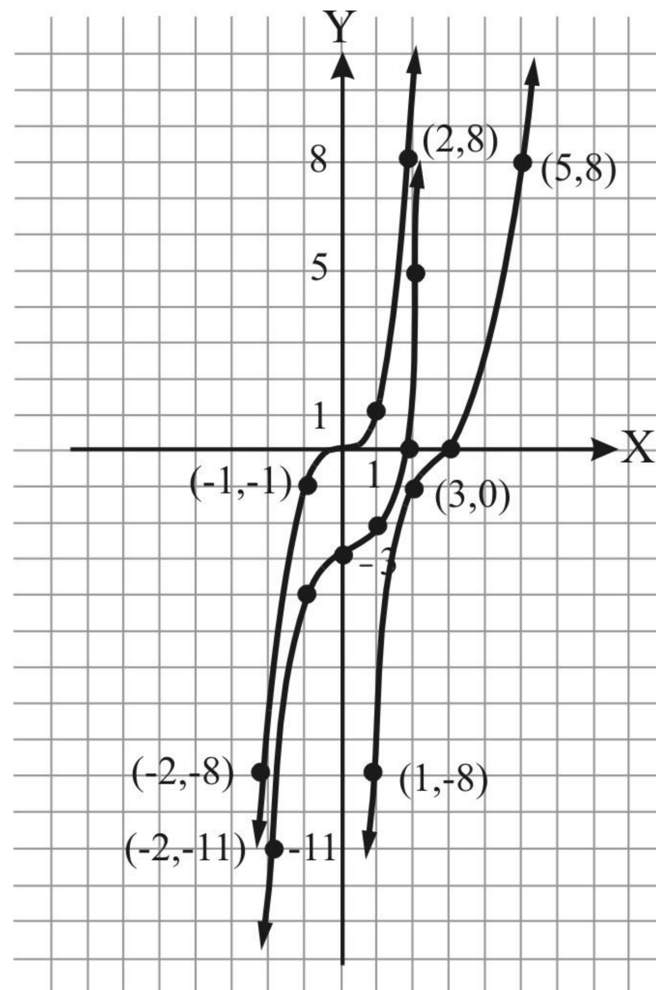
4: از انتقال گراف تابع $f(x) = x^3$ ، گراف های توابع $g(x) = x^3 - 3$ و $g(x) = (x-3)^3$ را رسم کنید.

حل:

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)$	0	1	8	−1	−8

x	0	1	2	−1	−2
$g(x) = x^3 - 3$	−3	−2	5	−4	−11

x	0	1	2	3	5
$g(x) = (x-3)^3$	−27	−8	−1	0	8



عملیه‌های توابع

صفحهٔ کتاب (103) وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر درس باید: • عملیه‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع را بدانند. • ساحهٔ تعریف حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم توابع را تعیین کرده بتوانند. • توابع را جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت عملیه‌های چهارگانهٔ توابع را درک کرده بتوانند و از فهم آن به مضمون ریاضی علاقه مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه و ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی غر ض تولید انگیزه، سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+2+2x+11=3x+13$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+2-(2x+11)=x+2-2x-11=-x-9$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از تعریف‌های عملیه‌های توابع و طرق تعیین کردن ناحیه‌های تعریف آنها مثال‌های اول و دوم باسهم گیری شاگردان روی تخته کار شود، سپس فعالیت اول درس را شاگردان اجرا کنند برای این که شاگردان طریق یافتن ناحیه‌های توابع را که در دروس قبلی این فصل خوانده اند بیاموزند، بعد از این که استاد محترم مثال سوم را حل کرد، فعالیت این درس را شاگردان اجرا کنند، بعد معلم محترم مثال‌های چهارم و پنجم را باسهم گیری شاگردان حل کنند و ناحیه‌های تعریف آن‌ها را روی محور اعداد نشان دهند.

مثال ششم به ارتباط این که یک تابع را چگونه دریک عدد ثابت ضرب می‌کنیم حل گردد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس قسمت(a) سؤال تمرین این درس کار شود.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی می توانید سؤال زیر از شاگردان بپرسید.

اگر $f(x)=5x^2$ و $g(x)=3x-1$ باشد؛ پس $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را دریابید؟

معلومات اضافی برای معلم:

خاصیت‌های عملیه‌های توابع

- اگر g,h و f توابع و t,n,m و p اعداد ثابت باشند؛ داریم که:

1) $h+g=g+h$
2) $f\cdot g=g\cdot f$
3) $(f+g)+h=(f+g)+h$
4) $(f\cdot g)h=(f\cdot g)h$

برای توابع $\alpha(x)=0$ و $k(x)=1$ داریم که:

5) $f+\alpha=f$
6) $f\cdot k=f$
7) $f+(g+h)=l(f+g)+h$
8) $f(g+h)=fg+fh \qquad m(f+g)=mf+mg$
9) $(m+n)f=mf+nf$
10) $m(fg)=(mf)g$
11) $(pt)f=P(tf)$

- متوجه باشید که $dom(\frac{f}{g})(x)$ در مثال سوم کتاب درسی صفحه (104) قرار ذیل نوشته شده است:

$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x/x\neq 2\ ,\quad x\neq 1\}$$

به شکل انتروال این چنین نیز می توانیم بنویسیم:

$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$$

- اگر $f(x)=x+3$ و $g(x)=-x-1$ باشد گراف $f+g$ و $f-g$ را رسم کنید.

حل:

$(f+g)(x)=x+3-x-1=2$

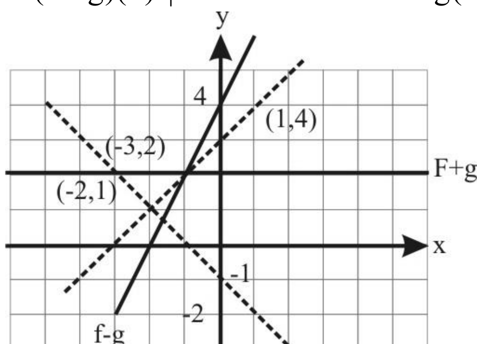
$(f-g)(x)=x+3+x+1=2x+4$

$y=x+3$

x	0	−1	−2	−3	1
f(x)	3	2	1	0	4

x	0	−2	1
(f − g)(x)	4	0	6

x	0	−1	−2	−3
g(x)	−1	0	1	2



جواب به سؤال های تمرین

توابع زیر را در نظر بگیرید:

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را دریابید.

2- ناحیه تعریف آن ها را نیز تعیین کنید.

$a: f(x)=2x+3 \qquad g(x)=x-1$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x+3)+(x-1)=3x+2$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x+3)-(x-1)=x+4$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x+3)(x-1)=2x^2-2x+3x-3=2x^2+x-3$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+3}{x-1}$

$b: f(x)=x-5 \qquad g(x)=3x^2$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-5)+(3x^2)=3x^2+x-5$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x-5)-(3x^2)=-3x^2+x-5$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-5)(3x^2)=3x^3-15x^2$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-5}{3x^2}$

$c: f(x)=2x^2-x-3 \qquad g(x)=x+1$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x^2-x-3+x+1=2x^2-2$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x^2-x-3-(x+1)=2x^2-2x-2$

$(f-g)(x)=2x^3+4x^2-4x-3$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x^2-x-3}{x+1}=2x-3$

$d: f(x)=\sqrt{x} \qquad g(x)=x-5$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+(g)=\sqrt{x}+x-5$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x+5$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}(x-5)=x\sqrt{x}-5\sqrt{x}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$

$e: f(x)=\sqrt{x+4} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-1}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=\sqrt{x^2+3x-4}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-1}}$

$f:f(x)=\sqrt{3x} \qquad g(x)=\sqrt{x^2-1}$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{3x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{3x}-\sqrt{x^2-1}$

$(f-g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{3x}(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{3x^3-3x}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2-1}}$

حل جزء دوم: $(-\infty,\infty)$ یا $dom\, g=IR \qquad dom\, f=IR$

$:a$

$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(\frac{f}{g})(x)IR\cap IR\setminus\{x/g(x)\neq 0\}=IR\setminus\{-1\}=\{x\in IR/x\neq -1\}=(-\infty,-1\cup(-1,\infty)$

$:b$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 0\}$

$:c$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x) \qquad dom(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR\setminus\{-1\}$

$dom\frac{f}{g}(x)=\{x\in IR\,|\,x\neq -1\}$

$:d$

$dom\, f=\{x\in IR/x\geq 0\} \qquad dom\, g=IR$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)$

$[0,\infty)\cap IR=[0,\infty) \qquad dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\geq 0\ ,\ x\neq 5\}$

یا $[0,\infty)-\{5\}$ یا $[0,5)\cup(5,\infty)$

$: e$

$dom\, f = \{x / x + 4 \geq 0\ ,\ x \geq -4\}$ يا $[-4, \infty]$

$dom\, g = \{x / x - 1 \geq 0\ ,\ x \geq 1\}$ يا $[1, \infty]$

$\mathrm{dom}(f + g)(x) = \mathrm{dom}(f - g)(x) = \mathrm{dom}(f \cdot g)(x) = [-4, \infty) \cap [1, \infty) = [1, \infty)$

يا

$\{x \in IR /\ 1 \leq x\}$

$\mathrm{dom}(\frac{f}{g})(x) = (1, \infty)$

$: f$

$\mathrm{dom}\, f = [0, \infty) \quad , \quad \mathrm{dom}\, g = \{x \in IR / x \leq -1$ يا $x \geq 1\}$

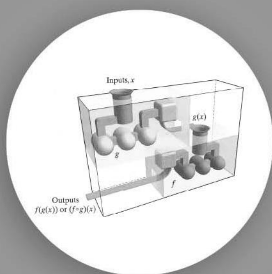
$dom(f + g)(x) = dom(f - g)(x) = dom(f \cdot g)(x) = [0, \infty) \cap [1, \infty) \cap (-\infty, -1] = [1, +\infty)$

$dom(\frac{f}{g})(x) = dom\, f \cap dom\, g \setminus \{x / g(x) \neq 0\}$

$dom\, f = [0, \infty)$

$dom\, g = \{x / x \in IR, x < -1\ , x > 1\}$

$dom\, f \cap domg = (-\infty, -1) \cap [0, \infty) \cap (1, \infty) = (1, \infty)$



ترکیب توابع یا توابع مرکب

صفحهٔ کتاب (107)　　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• تعریف توابع مرکب را بدانند. • توابع را باهم ترکیب کرده بتوانند. • مفهوم ترکیب توابع را درک کنند. • ناحیه‌های تعریف توابع مرکب را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت خاصیت‌های توابع مرکب را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممددرسی	کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی در مورد شکل ورودی از شاگردان پرسیده شود. مفهوم شکل ورودی این است که تابع را به شکل یک ماشین فکر کنیم که در ماشین اول input یا x عبارت از ناحیهٔ تعریف تابع $g(x)$ می‌باشد و در ماشین دوم $g(x)$ به حیث ناحیهٔ تعریف تابع F می‌باشد که بعد از ترکیب، تابع به شکل $(Fog)(x)$ یا $F(g(x))$ و یا $f[g(x)]$ نشان داده می‌شود.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را شاگردان با همکاری معلم اجرا کنند و معلم محترم مثال‌های اول و دوم را با سهم گیری شاگردان حل کند. فعالیت صفحهٔ(108) را شاگردان در گروپ‌ها کار کنند و کار خود را به دیگران توضیح نمایند، مثال سوم و چهارم این درس را استاد کار کند و ناحیهٔ تعریف توابع Fog را در شکل واضح سازد، همچنان مثال پنجم کار شود و طریق یافتن ترکیب دو تابع در یک قیمت مشخص x به شاگردان توضیح شود. شاگردان فعالیت صفحهٔ(110) را اجرا کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

اگر $F(x)=5x^2$ و $g(x)=3x-1$ باشد ؛ gof و gog را دریابید.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

اگر $f(x)=3x-4$ و $g(x)=-x^2$ باشد؛ $(fog)(2), (gog)(2)$ و $(fof)(-2)$ را دریابید؟

معلومات اضافی برای معلم

• اگر $f(x)=4x^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{x+2}$ باشد.

$(fog)(-1)$ 　$(gof)(2)$ عبارت اند از:

حل:

$f(2) = 4(2)^2 + 1 = 17$

$g(17) = \frac{1}{17+2} = \frac{1}{19} \Rightarrow (gof)(2) = \frac{1}{19} \Rightarrow (gof)(2) = \frac{1}{19}$

برای دریافت $(fog)(-1)$، اول $g(-1)$ را دریابید:

$g(-1) = \frac{1}{-1+2} = 1$

$f(1) = 4(1)^2 + 1 = 5 \Rightarrow (fog)(-1) = 5$

- اگر $x=0.25$ و $f(x) = \sqrt{x}$ باشد

$f(0.25) = \sqrt{0.25} \approx 0.5$

$f^2(0.25) = \sqrt{\sqrt{0.25}} \approx 0.7071$

$f^3(0.25) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{0.25}}} \approx 0.8409$

$f^4(0.25) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.25}}}} \approx 0.9170$

- اگـــر $g(2x-1) = 2x+3$ باشـــد، $g(x)$ عبـــارت اســـت از: ســـمت راســـت $(2x+3)$ را بـــه شـــکل $2x+3 = 2x-1+4$ می نویسیم حال به عوض $2x-1$ اگر x قرار داده شود؛ پس $g(x) = x+4$ می‌شود.
- اگر f یک تابع باشد از ست A بـه B کـه ناحیۀ تعریـف آن $\{1,2\}$ و ناحیـۀ قیمـت هـای آن $\{a,c\}$ باشـد و g تابعی باشد از ست C به D که ناحیۀ تعریف آن $\{a\}$ و ناحیۀ قیمت های آن $\{n\}$ باشد؛ پس تـابع مرکـب gof تابع خواهد بود از A به D که شرط تشکیل تابع مرکب gof این است کـه ناحیـۀ قمیـت هـای f (یـا قـسمتی از ناحیــۀ قیمــت هــای f) ســت فرعــی ناحیــۀ تعریــف g باشــد D_{gof} عناصــر از ناحیــۀ تعریــف f اســت یــا $D_{gof} = \{x \in D_f\}$ است به شرطی که تشکیل تابع مرکب موجود باشد یعنی ناحیۀ قیمت های f (و یـا برخـی از آن) که در این مثال فقط $\{a\}$ هر عنصر یا ناحیه تعریف g می باشد؛ پس:

$D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$

یعنی در تابع مرکب gof ناحیۀ تعریف را از f و ناحیۀ قیمت ها را از g انتخاب می کنیم.

مثال: اگر ناحیۀ تعریف $f(x) = 2x+1$ عبارت از $x \geq 0$ و ناحیۀ تعریف $g(x) = 3x-2$ به صورت $-3 < x < 5$ باشد ناحیۀ تعریف تابع مرکب gof عبارت است از:

قرار تعریف $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ نخست D_g را معلوم کرده و به جای x در D_g تابع f قرار میدهیم.

$D_g \Rightarrow -3 < x < 5 \Rightarrow -3 < f(x) < 5$

$-3 < 2x+1 < 5 \Rightarrow -4 < 2x < 4 \longrightarrow -2 < x < 2$

حال تقاطع این نتیجه را با D_f در می یابیم.

$-2 < x < 2 \cap x \geq 0$

که جواب آن $0 \leq x \leq 2$ عبارت از ناحیۀ تعریف $(gof)_{(x)}$ می باشد.

یا می توانیم در مثال فوق برای دریافت ناحیۀ تعریف fog این طور عمل نماییم:

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

نخست ناحیهٔ تعریف f را معلوم کرده؛ سپس عوض x باید g(x) را قرار دهیم و تقاطع آن را با D_g به دست بیاوریم:

$$D_f =: \longrightarrow x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow 3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \cap D_g$$

پس ناحیهٔ تعریف تابع fog عبارت از $\frac{2}{3} \leq x < 5$ می باشد.

- اگر $f(x) = \frac{2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$ باشد fog و ناحیهٔ تعریف آن را دریابید.

$D_f = IR - \{3\}$

$D_g = R - \{-1\}$

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in IR, x \neq -1, \frac{x-2}{x+1} \neq 3\}$$

$$= \{x \mid x \in IR, x \neq -\frac{5}{2}\} = IR - \{-\frac{5}{2}, -1\}$$

$$(fog)(x) = f(\frac{x-2}{x+1}) = \frac{2}{\frac{x-2}{x+1} - 3} = \frac{2x+2}{-2x-5}$$

- اگر (fog)داشته باشیم و بخواهیم که f(x) را به دست آوریم از تساوی g(x)=t بر حسب t معلوم کرده و جواب را در $(fog)_{(x)}$ به عوض x قرار میدهیم.

طور مثال: اگر $(fog)_{(x)} = 6x - 3$ باشد می خواهیم f(x) را به دست آوریم و اگر $g(x) = 3x - 2$ باشد.

$$g(x) = t \longrightarrow 3x - 2 = t \longrightarrow 3x = t + 2 \longrightarrow x = \frac{t+2}{3}$$

حال اگر $\frac{x+2}{3}$ را به عوض x در 6x-3 جا به جا کنیم f(x) بدست می آید:

$$f(x) = 6(\frac{x+2}{3}) - 3 = 2(x+2) - 3 = 2x + 4 - 3 = 2x + 1$$

مثال: اگر $g(4x+1) = 2x - 11$ باشد $g_{(x)}$ و $g(-1)$ را معلوم کنید.

$$4x + 1 = t \Rightarrow 4x = t - 1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{4}$$

حال باید در 2x-11 به عوض x قیمت آن یعنی $\frac{t-1}{4}$ را جا به جا نماییم؛ البته عوض $\frac{t-1}{4}$ افادهٔ $\frac{x-1}{4}$ را قرار می دهیم داریم که:

$$g(x) = 2(\frac{x-1}{4}) - 11 = \frac{x-1}{2} - 11 = \frac{x-1-22}{2} = \frac{x-23}{2} \Rightarrow g(-1) = \frac{-1-23}{2} = -12$$

بعضی اوقات به طور ساده این طور نیز به دست می آید:

مثال: اگر $g(2x-1) = 2x+3$ باشد $g(x)$ را معلوم کنید.

سمت راست مساوات یا 2x+3 را 2x-1 می سازیم.

2x+3=2x-1+4

حال به عوض 2x-1 اگر x قرارداده شود g(x)=x+4 می شود.

- اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ باشد f(x) را دریابید.

حل: اول باید از $x^2+\frac{1}{x^2}, x+\frac{1}{x}$ ساخته شود؛ سپس عوض $x+\frac{1}{x}$، متحول x قرار داده شود.

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=(x+\frac{1}{x})^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$$

- اگر $f(x)-3f(-x)=3x$ باشد f(x) را دریابید.

حل: به عوض x,x− را جا به جا می کنیم داریم که:

F(-x)=-3f(x)=-3x

برای از بین بردن f(-x) معادلهٔ دوم را در عدد 3 ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} f(x)-3f(-x)=3x \\ f(-x)-3f(x)=-3x \end{cases}$$

$$f(x)-9f(x)=3x-9x \Rightarrow -8f(x)=-6x \Rightarrow f(x)=\frac{6x}{8}=\frac{3x}{4}$$

- اگر $f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$ باشد f(x) را تعیین کنید.

حل: چون x و $\frac{1}{x}$ داریم؛ پس در رابطهٔ داده شده عوض x، $\frac{1}{x}$ را می نویسیم که رابطهٔ $f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1$ به دست می آید:

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$$

$$f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1$$

برای این که $f(\frac{1}{x})$ را حذف کرده باشیم معادلهٔ دوم را در (2−) ضرب می کنیم و هر دو رابطه را جمع می کنیم:

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$$

$$-2f(x)-4f(x)=\frac{-4}{x}-2$$

$$-3f(x)=2x+1-\frac{4}{x}-2=2x-\frac{4}{x}-1$$

پس $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3x}+\frac{1}{3}$ می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- اگر $f(x)=-3x+2$ و $g(x)=x^3$ باشد:

$$(f+g)(x) \quad , \quad (f-g)(x) \quad , \quad (g\cdot f)(x) \quad , \quad (\frac{g}{f})(x) \quad , \quad (g-f)(x)$$

را دریابید و نیز ناحیهٔ تعریف آن ها را تعیین کنید.

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-3x+2+x^3$

$\mathrm{dom} f=IR \quad , \quad \mathrm{dom} g=IR \Rightarrow \mathrm{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$

$(g-f)(x)=x^3-(-3x+2)=x^3+3x-2$

$\mathrm{dom}(g-f)(x)=IR$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=x^3(-3x+2)=-3x^4+2x^3 \quad \mathrm{dom}(f\cdot g)(x)=IR$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^3}{-3x+2}$

$-3x+2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$\mathrm{dom}(\frac{g}{f})(x)=\left\{x\in IR / x\neq \frac{2}{3}\right\}=(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},\infty) \qquad IR\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$(f-g)(x)=-3x+2-x^3$

$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$

2- اگر $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=\sqrt{x-3}$ باشد $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ و $(\frac{g}{f})(x)$ را معلوم کنید.

حل:

$(f\cdot g)(x)=(x^2-3)(\sqrt{x-3})$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-3}{\sqrt{x-3}}$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-3}$

3- اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $k(x)=\sqrt{3x+4}$ باشد ناحیه های تعریف توابع $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ و $(\frac{h}{k})(x)$ را دریابید.

حل جزء I:

$\mathrm{dom} f=IR \quad \mathrm{dom} g(x)=IR-\{0\}$

$\mathrm{dom}(f\cdot g)(x)=IR\setminus\{0\}$

حل جزءII:

$dom\, f=IR \qquad dom\, g=IR-\{0\}$

$dom(\frac{f}{g})(x)=IR\setminus\{0\}$

حل جزء III:

$\mathrm{dom} h=\{x\in IR/-2\le x\le 2\}=[-2,2]$

$\mathrm{dom} h=4-x^2\ge 0$ یا

$dom\ k=3x+4\ge 0 \Rightarrow x\ge -\frac{4}{3}$

$dom\, k=[-\frac{4}{3},\infty)$

$dom(h \cdot k)(x) = [-2,2] \cap [-\frac{4}{3}, \infty) = [-\frac{4}{3}, 2]$

$dom(\frac{h}{k})(x) = [-2,2] \cap [-\frac{4}{3}, \infty) - \{\frac{4}{3}\} = (-\frac{4}{3}, 2]$

یا:

$dom(\frac{h}{k})(x) = [-2,2] \cap [-\frac{4}{3}, +\infty) - \{x / k(x) = 0\} = [-\frac{4}{3}, 2] - \{\frac{4}{3}\} = (-\frac{4}{3}, 2]$

4- اگر $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = x^2$ باشد $(g o f)(3)$ و $(f o g)(1)$ را دریابید.

حل:

$(g o f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

$(g o f)(3) = 9 \cdot 9 - 36 + 4 = 85 - 36 = 49$

$(f o g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2$

$(f o g)(1) = 3 - 2 = 1$

5- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{2 - x}$ باشد $f o g$, $g o f$ و $f o f$ را دریابید.

حل:

$(f o g)(x) = f(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$ $\qquad (g o f)(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$

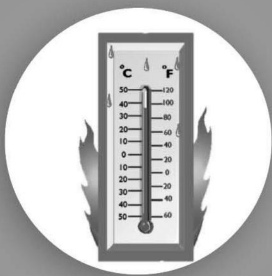
$f o f = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

6- اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ و $h(x) = x + 3$ باشد $(f o g o h)(x)$ را دریابید.

حل:

$(f o g o h)(x) = (f o g),(h(x)) = f(g((h(x)) = (f o g,(x + 3))f(x + 3)^{10} \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}$

یا: $(fog) = \frac{x^{10}}{x^{10} + 1} \Rightarrow (fogoh)(x) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}$



تابع معکوس(Inverse Function)

صفحهٔ کتاب (111) وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • تعریف تابع معکوس و تابع یک به یک را بدانند. • بدانند که هر تابع معکوس پذیر نمی‌باشد. • درک کنند که معکوس تابع یک به یک، تابع می باشد. • ارتباط بین تابع و معکوس تابع را بفهمند. • بفهمند که ناحیهٔ تعریف تابع عبارت از ناحیهٔ قیمت‌های تابع معکوس آن و ناحیهٔ قیمت‌های تابع عبارت از ناحیهٔ تعریف تابع معکوس آن می‌باشد. • معکوس یک تابع را دریافت کرده بتوانند. • گراف تابع و گراف معکوس تابع را رسم کرده بتوانند. • ارتباط بین گراف تابع و گراف تابع معکوس را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت مواد ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	از شاگردان پرسیده شود که در ترمامیتر شکل ورودی بین درجه‌های حرارت سانتی گرید و فارنهایت چه رابطه یی وجود دارد؟ که این رابطه معکوس یکدیگر می‌باشد. $C=\frac{5}{9}(F-32)$ و $F=\frac{9}{5}C+32$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم شاگردان را متوجه سازد، وقتیکه یک تابع به شکل جوره‌های مرتب داده شده باشد، اگر عناصر دومی جوره‌های مرتب تکرار نشده باشد اینگونه تابع معکوس پذیر می‌باشد و اگر عناصر دومی جوره‌های مرتب تکرار شده باشد تابع معکوس پذیر نیست. یا این که فقط توابع یک به یک معکوس پذیر می‌باشند، برای وضاحت این مفهوم استاد محترم مثال‌هال اول و دوم را باسهم گیری شاگردان حل کند بعد از این که شاگردان تعریف تابع یک به یک را بیاموزند مثال سوم کار شود و فعالیت صفحهٔ(113) را شاگردان در گروپ‌ها اجرا کنند و کار خود را توضیح کنند. برای این که شاگردان از روی گراف تابع یک به یک را تشخیص کنند، معلم محترم مثال چهارم را یا از روی چارت و یا روی تخته در شکل کار کند، و بعد از تعریف تابع معکوس مثال‌های پنجم، ششم و هفتم را باسهم گیری شاگردان حل کند، اول باید به شاگردان ارتباط گراف تابع و گراف معکوس آن واضح شود بعد مثال‌های نهم و دهم را از روی چارت و یا به روی تخته کار کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال زیر حل شود:

اگر $f(x)=0.2x+0.4$ باشد

معکوس تابع $f(x)$ را دریابید.

حل: $f^{-1}(x)=\frac{x-0.4}{0.2}$ یا $f^{-1}(x)=5x-2$

ارزیابی درس: (5) دقیقه

نشان دهید که آیا توابع $F(x)=\frac{5}{2x-4}$ و $g(x)=\frac{4x+5}{2x}$ معکوس یکدیگر اند؟

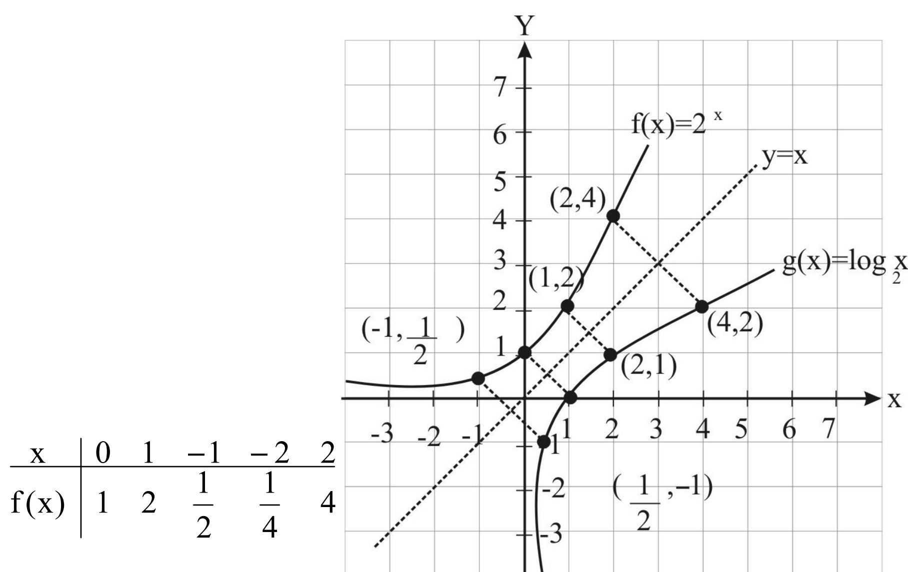
معلومات اضافی برای معلم

1- جملات زیر معادل اند:

- معکوس تابع F یک تابع می‌باشد.
- F تابع یک به یک می‌باشد.
- خط افقی گراف تابع F را در یک نقطه قطع می کند.
- $\forall x\in dom\,F(x) \qquad \forall x\in dom\,F^{-1}:\ F(F^{-1}(x))=F^{-1}(f(x))=x$
- گراف‌های توابع F و $F^{-1}(x)$ نظر به خط مستقیم $y=x$ متناظر می‌باشند.

2- اگر $F(x)=2^x$ و $g(x)=\log_2 x$ باشد؛ که معکوس یکدیگر اند.

حل:



x	0	1	−1	−2	2
f(x)	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4

x	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4
g(x)	0	1	−1	−2	2

که گراف های آن ها نسبت به خط $y=x$ متناظر می باشد.

$(g^{-1}oF^{-1})=(fog)^{-1}$

3- ترکیب یک تابع با معکوس آن:

$f(x)=mx+b \Rightarrow y=mx+b$

$x=my+b \Rightarrow y=\frac{x-b}{m} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x-\frac{b}{m}$

$(f^{-1}of)(x)=f^{-1}(mx+b)=\frac{1}{m}(mx+b)-\frac{b}{m} \Rightarrow x+\frac{b}{m}-\frac{b}{m}=x$

$(fof^{-1})(x)=f(\frac{1}{m}x-\frac{b}{m})=m(\frac{1}{m}x-\frac{b}{m})+b \Rightarrow x-b+b=x$

4- معکوس توابع $\mathrm{f(x)=1-x^2}$ و $f(x)=x^4$ توابع نمی باشد و معکوس توابع

$\mathrm{h(x)=\frac{3}{x}, g(x)=\frac{7-2x}{5}, h(x)=-\frac{1}{3}x+5, f(x)=2x^3}$ و $\mathrm{f(x)=x^5}$ توابع می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- معکوس توابع ذیل را دریابید و بگویید که معکوس کدام تابع نیز یک تابع می باشد؟

$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\}$

حل:

$f^{-1}=\{(0,-1),(1,-2,(3,4),(4,3)\}$

پس f^{-1} تابع می باشد.

$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

حل:

$g^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}$

دیده میشود که g^{-1} تابع نمی باشد؛ زیرا برای عدد 2 دو تصویر موجود است.

$h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$

$h^{-1}=\{(4,1),(3,2),(1,4)\}$

h^{-i}نیز یک تابع می باشد.

$k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$

حل:

$k^{-1}=\{(0,3),(-1,2),(2,1),(1,0),(2,-1)\}$

پس دیده می شود که k^{-1} تابع نمی باشد؛ زیرا که عدد2 به دوعدد1 و 1- رابطه دارد.

2- معکوس هر یک از توابع ذیل رادریابید وصحت جواب خود را با $\mathrm{f(f^{-1}(x))=x}$ امتحان کنید.

$f(x)=x+3$

حل:اگر $y=x+3$ باشد معکوس آن

$y = f(x) = x + 3$

$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \Rightarrow y = x - 3$

$f^{-1}(x) = x - 3$

$f(f^{-1}(x)) = f(x - 3) = x - 3 + 3 = x$

• $f(x) = 2x$

$y = 2x \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2}) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$

• $f(x) = 2x + 3$

$y = 2x + 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{x - 3}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x - 3}{2}) = 2(\frac{x - 3}{2}) + 3 = x$

• $f(x) = x^3 + 2$

$y = x^3 + 2 \Rightarrow x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - 2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x - 2}) = (\sqrt[3]{x - 2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$

• $f(x) = (x + 2)^3$

$y = (x + 2)^3 \Rightarrow x = (y + 2)^3 \Rightarrow y + 2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} - 2$

$y = \sqrt[3]{x - 2}$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x - 2}) = (\sqrt[3]{x} - 2 + 2)^3 = x$

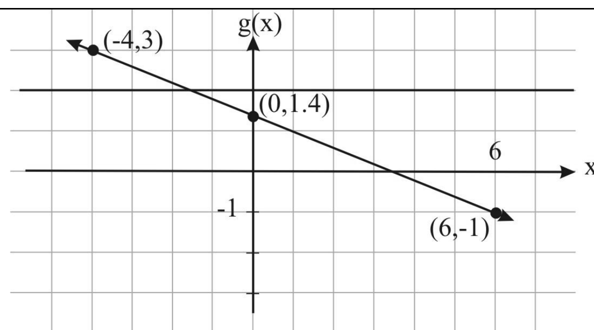
• $f(x) = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

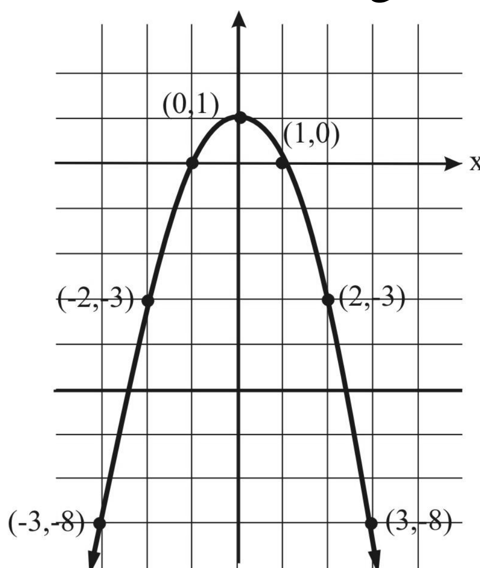
$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

3-گراف های توابع ذیل را رسم کنید وتوسط خط موازی با محور x (خط افقی) نشان دهید که معکوس آن نیز یک تابع می باشد یا خیر؟ $g(x) = \frac{7 - 2x}{5}$



$f(x)=1-x^2$

چون خط افقی گراف تابع را در یک نقطه قطع کرده است؛ پس معکوس آن نیز یک تابع می باشد.



چون خط افقی گراف تابع را در دو نقطه قطع کرده است پس معکوس آن یک تابع نمی باشد.

4- کدام یک از توابع ذیل تابع یک به یک می باشد؟

$a)\quad y=4x-5 \qquad b)\quad y=6-x \qquad c)\quad y=(x-2)^2$

$d)\quad y=9 \qquad e)\quad y=\dfrac{1}{x+2}$

حل: توابع a و b، توابع یک به یک می باشند؛ زیرا برای

$a\neq b\Rightarrow f(a)\neq f(b) \qquad a=b\Rightarrow f(a)=f(b)$

c: $y=(x-2)^2$ تابع یک به یک نمی باشد؛ زیرا:

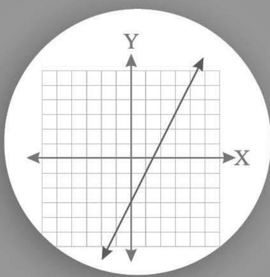
$4\neq 0 \qquad \begin{matrix} f(4)=4 \\ f(0)=4 \end{matrix} \Rightarrow f(4)=f(0)$

d: $y=9$ تابع یک به یک نمی باشد.

$-2\neq 3 \qquad \begin{matrix} f(-2)=9 \\ f(3)=9 \end{matrix}$

e: تابع یک به یک می باشد؛ زیرا:

اگر $f(a)\neq f(b)\Leftarrow a\neq b\Rightarrow \dfrac{1}{a+2}\neq\dfrac{1}{b+2}\Rightarrow a+2\neq b+2\Rightarrow f(a)\neq f(b)$



توابع پولینومی

صفحهٔ کتاب (119)　　وقت تدریس(3 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخیر این درس: • طریق رسم کردن گراف‌های تابع درجه یک و درجه دوم را بیاموزند. • طریق یافتن نقاط تقاطع گراف‌های توابع درجه یک و درجه دوم را با محور های x و y بیاموزند. • کمیات وضعیه نقاط اصغری یا اعظمی گراف توابع درجه دوم را دریافت کرده بتوانند. • معادلهٔ محور تناظر گراف تابع درجه دوم را دریافت کرده بتوانند. • انتقال عمودی، افقی و ترکیب انتقال را در گراف‌های توابع درجه دوم تطبیق کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت گراف‌های توابع درجه دوم را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، تباشیر، چارت مواد محیطی ... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	در صورتیکه چارت شکل ورودی موجود باشد سؤال‌های ورودی را از شاگردان بپرسید و واضح گردد که: چون گراف تابع درجه یک، یک خط مستقیم می‌باشد از این سبب تابع درجه یک را تابع خطی نیز می گویند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

معلم محترم باسهم گیری شاگردان مثال‌های اول و دوم را حل کند و گراف‌های آن را روی تخته رسم نماید و طریق یافتن کمیات وضعیه نقاط تقاطع گراف تابع درجه یک با محور x و y را توضیح نماید.

شکل عمومی تابع درجه دوم (شکل معیاری) را بنویسید و گراف‌های ساده‌ترین توابع درجه دوم $F(x)=x^2$ و $F(x)=-x^2$ را روی تخته رسم کنید تا شاگردان درک کنند که دهن گراف تابع چه وقت به طرف بالا و چه وقت به طرف پایین باز می‌شود.

استاد محترم مثال اول را حل کند، گراف آن را در چارت و یا روی تخته رسم نموده و در شکل نشان دهد که گراف در کدام انتروال متزاید و در کدام متناقص می باشد. به همین ترتیب با سهم گیری شاگردان مثال‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم حل گردد طریق یافتن کمیات وضعیه نقاط تقاطع پارابولا با محور x و y توضیح شود، غرض

وضاحت طریق یافتن کمیات وضعیه رأس پارابول توسط طریق تکمیل مربع و فورمول و طریق یافتن معادله محور تناظر پارابول، مثال‌های ششم و هفتم با سهم گیری شاگردان کار شوند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

کمیات وضعیه رأس‌های گراف توابع درجه دوم $y = 6x^2 - x - 12$ و $y = x^2 + 3x - 2$ را دریابید.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

معادله‌های محور تناظر گراف توابع $F(x) = 3 + 5x + \frac{1}{3}x^2$ و $F(x) = 3x^2 + 5x$ را دریابید.

معلومات اضافی برای معلم

سه شکل توابع درجه دوم(Three forms of quadratic funtions)

t, k, h, c, b, a و s اعداد حقیقی و $a \neq 0$ می‌باشد.

1- Transformation form عبارت از $F(x) = a(x-h)^2 + k$ می‌باشد.

2- Polynomial form عبارت از $F(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد.

3- X-Intercept form عبارت از $F(x) = a(x-s)(x-t)$ می‌باشد.

اگر $a > 0$ باشد دهن پارابولا به طرف بالا و اگر $a < 0$ باشد دهن پارابولا به طرف پایین می‌باشد.

1- شکل Transformation: طور عموم برای دریافت کمیات وضعیه رأس(vertex) به کار برده می‌شود، در $F(x) = a(x-h)^2 + k$ کمیات وضعیه راس پارابولا، (h,k) می‌باشند و نقطهٔ تقاطع گراف با محور y، $F(0) = a(0-h)^2 + k = ah^2 + k$ نقطه $(0, k)$ می‌باشد در نقطهٔ تقاطع گراف با محور x قیمت $y = 0$ می‌شود.

$a(x-h)^2 + k = 0 \;\Rightarrow\; a(x-h)^2 = -k$

$(x-h)^2 = -\frac{k}{a} \;\Rightarrow\; x - h = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}}$

$x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}}$

کمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع گراف با محور x , $(h - \sqrt{\frac{-k}{a}}, 0)$ و $(h + \sqrt{\frac{-k}{a}}, 0)$ می‌باشند.

مثال: $F(x) = 2(x-3)^2 + (-4)$ $\quad a = 2$ و $h = 3$, $k = -4$

کمیات وضعیهٔ راس پارابول عبارت از $(h,k) = (3, -4)$ می‌باشد.

کمیات وضعیه نقطه تقاطع با محور y عبارت اند از: $ah^2 + k = 2(3^2) - 4) = 14$ یا در نقطه (0.14) گراف محور y را قطع می کند.

تقاطع با محور x عبارت اند از:

$h + \sqrt{\frac{-k}{a}} = 3 + \sqrt{2} \approx 4.4 \qquad h - \sqrt{\frac{-k}{a}} = 3 - \sqrt{2} \approx 1.6$

2- شکل پولینومی طور عموم برای دریافت کمیات وضعیه نقطهٔ تقاطع گراف با محور y و x به کار برده می‌شود.

تقاطع با محور y: $F(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$

تقاطع با محور x: $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ در صورتی که $b^2-4ac\geq 0$ باشد.

برای دریافت رأس پارابولا:

$$\frac{-b}{2a}=h$$

که h مختصهٔ x نقطهٔ رأس می باشد. در نتیجه کمیات وضعیهٔ رأس عبارت اند از:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$$

$$F(x)=a(x-h)^2+k$$

$$F(x)=ax^2-2ahx+ah^2+k \quad \Rightarrow \quad b=-2ah$$

$h=-\frac{b}{2a}$ راس $[(\frac{b}{2a}), F(-\frac{b}{2a})]$

3- شکل X-intercept: $f(x)=a(x-s)(x-t)$ که s و t حل معادلهٔ $F(x)=0$ می باشد.

$$F(s)=a(s-s)(s-t)=a(0)(s-t)=0$$

$$F(t)=a(t-s)(t-t)=a(t-s)(0)=0$$

$$F(0)=a(0-s)(0-t)=ast$$

تقاطع با محور y عبارت از $f(0)$ می باشد.

پس تقاطع با محور y عبارت از (ast) می باشد چون گراف پارابول با محور y متناظر می باشد. پس x نقطه رأس $(\frac{s+t}{2})$ می باشد قیمت y نقطهٔ رأس عبارت از $f(\frac{s+t}{2})$ است.

مثال: اگر $f(x)=-\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$ باشد کمیات وضعیهٔ رأس و نقاط تقاطع با محور های x و y را دریابید و گراف آن را رسم کنید.

حل:

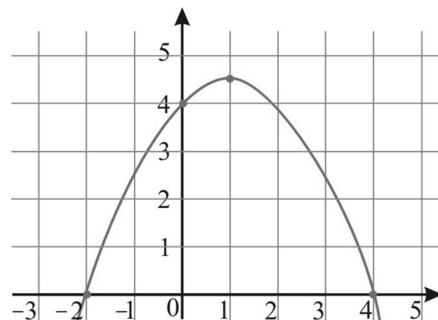
$$a=-\frac{1}{2} \quad , \quad t=-2 \quad , \quad s=4$$

تقاطع با محور y عبارت است از:

$$ast=-\frac{1}{2}(4)(-2)=4$$

نقطه تقاطع با محور y $(0,4)$ می باشد و کمیات وضیعهٔ نقطهٔ رأس عبارت اند از:

$$f(\frac{s+t}{2})=f[(\frac{4-2}{2}),\ f(\frac{-2}{2})]=(1,4.5)$$



تبدیل کردن اشکال توابع درجه دوم با یکدیگر:

مثال: در صورت امکان توابع درجه دوم ذیل را به شکل پولینومی و به شکلX-intercept تبدیل کنید.

a) $f(x)=0.4(x-3)^2+2$

b) $g(x)=3x^2-3.9x-43.2$

c) $h(x)=-2(x-4)(x+2)$

حل a: می خواهیم به شکل پولینومی تبدیل نماییم:

$$f(x)=0.4(x-3)^2+2=0.4x^2-2.4x+5.6$$

در نتیجه $b^2-4ac=-3.2$ می شود.

چون محور x را قطع نمی کند؛ پس نمی توانیم به شکل X-intercept بنویسیم.

b: چون ا ین تابع درجه دوم به شکل پولینومی داده شده است برای این که آن را به شکل X-intercept بنویسیم چون a=3 است.

$$g(x)=3x^2-3.9x-43.2$$

$$g(x)=3(x^2-1.3x-14\cdot4)$$

$$\frac{1.3\pm\sqrt{(-1.3)^2-4(1)(-14.4)}}{2}=\frac{1.3\pm7\cdot7}{2}=4.5 \text{ و } -3.2$$

پس شکل X-intercept آن عبارت است ا ز: $g(x)=3(x-4.5)(x+3.2)$

c: تابع $h(x)$ به شکل X-intercept داده شده است می خواهیم تابع به شکل پولینومی تبدیل نماییم:

$$h(x)=-2(x-4)(x+2)$$

$$h(x)=-2(x^2-2x-8)=-2x^2+4x+16$$

مثال: توابع ذیل را به شکل Transformation تبدیل کنید.

$a)$ $f(x)=-3x^2+4x-1$

$b)$ $g(x)=0.3(x-2)(x+1)$

$$f(x)=-3x^2+4x-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x)-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})-1$$

$$=-3[(x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}]-1=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}-1$$

$$f(x)=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$$

:b

$$g(x)=0.3(x-2)(x+1)=0.3(x^2-x-2)=0.3(x^2-x+0.25-0.25-2)=0.3[(x-0.5)^2-2.25]$$

$$g(x)=0.3(x-0.5)^2-0.675$$

خلص اشکال توابع درجه دوم:

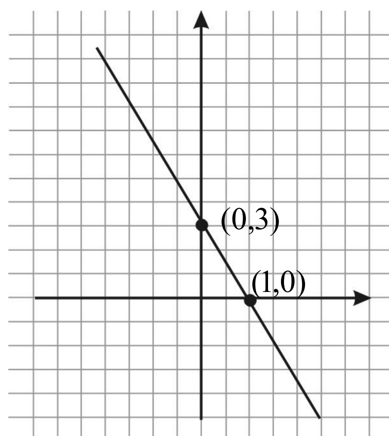
نام شکل	Transformation	Polynomail	x-intercept
راس	$f(x)=a(x-h)^2+k$ (h,k)	$f(x)=a^2+bx+c$ $[\frac{-b}{2a},f(-\frac{b}{2a})]$	$f(x)=a(x-s)(x-t)$ $[\frac{s+t}{2},f(\frac{s+t}{2})]$
تقاطع یا محور x	$\mathrm{h}+\sqrt{\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{a}}}$ و $\mathrm{h}-\sqrt{\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{a}}}$	$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	S و t
تقاطع با محور y	ah^2+k	c	ast

جواب به سؤال های تمرین

1 – گراف تابع $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ را رسم کنید.

حل: برای ترسیم گراف این تابع کافی است، تا دونقطهٔ خط مستقیم مذکور را در یافت نماییم و با هم وصل شود.

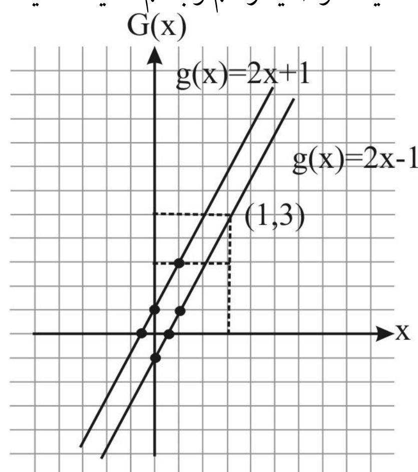
x	0	1
$h(x)$	3	0



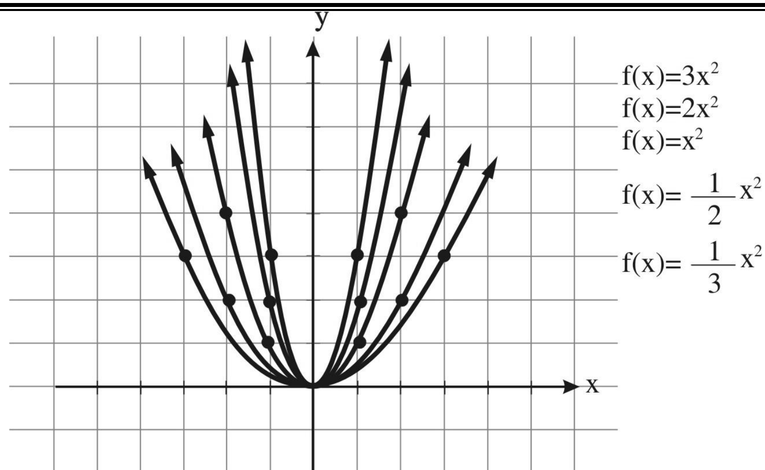
2 – گراف های توابع $g(x)=2x+1$ و $g(x)=2x-1$ را درعین سیستم کمیات وضعیه رسم و باهم مقایسه کنید.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g(x$	-1	0	1

x	0	$-\frac{1}{2}$	1
$y(x)$	1	0	3



3-گراف های توابع $f(x)=x^2, f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ و $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم و باهمدیگر مقایسه کنید.



x	0	1	2	3	-2	-3
$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	4.5	2	4.5

x	0	3	-3
$f(x)=\frac{1}{3}x^2$	0	3	3

x	0	1	-1	1.5
$f(x)=2x^2$	0	2	2	4.5

x	0	1	-1	1.5
$f(x)=3x^2$	0	3	3	6.75

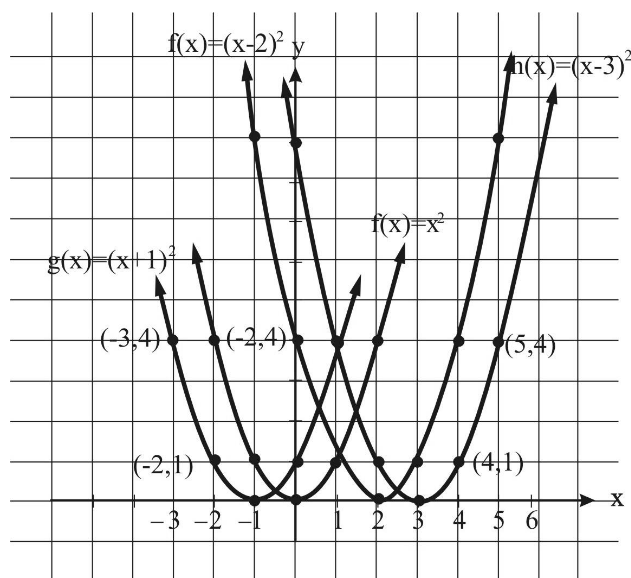
4 – معادله های محور های تناظر توابع زیر را دریابید.

a: $f(x)=x^2+8x+13$ b: $f(x)=x^2-12x+30$ c: $f(x)=3x^2-2x+6$

حل a: $x=-4$ $\quad x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2}=-4$

b: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-12)}{2}=6\Rightarrow x=6$ c: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

5 – گراف های توابع $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ و $h(x)=(x-3)^2$ را رسم کنید و بگویید که با گراف تابع $f(x)=x^2$ چه ارتباط دارند؟



x	x^2
0	0
1	1
−1	1
2	4
−2	4

x	$(x-2)^2$
5	9
4	4
3	1
2	0
−1	9

x	$(x-3)^2$
5	4
4	1
3	0
2	1
1	4
0	9

x	$(x+1)^2$
1	4
0	1
−1	0
−2	1
−3	4

در $f(x)=(x-2)^2$ گراف تابع $f(x)=x^2$ به اندازه 2 واحد به طرف راست و در g(x) گراف $f(x)=x^2$ به اندازه یک واحد به طرف چپ و در h(x) گراف تابع $f(x)=x^2$ به اندازه 3 واحد به طرف راست انتقال کرده است.

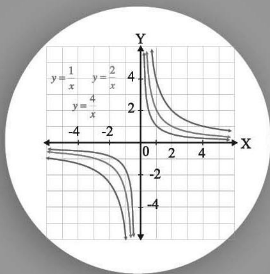
6 – کمیات وضعیه رأس گراف تابع $y=-x^2-1$ عبارت اند از:

a: $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ ⓒ $(0,-1)$ d: $(0,1)$

7 – کمیات وضعیه رأس گراف تابع $y=(x-1)^2-2$ عبارت اند از:

a: $(1,-1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ ⓓ $(1,-2)$

چون به قیمت $x=1$ قیمت $y=-2$ میشود پس کمیات وضیعهٔ نقطه رأس پارابول $(1,-2)$ بوده و جواب درست d می باشد.



توابع ناطق یا توابع نسبتی

صفحهٔ کتاب (129) وقت تدریس(3 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخیر این درس: • تعریف تابع ناطق، مجانب عمودی، مجانب افقی و مایل را بیاموزند. • ناحیهٔ تعریف توابع ناطق را دریافت کرده بتوانند. • مجانب‌های توابع ناطق را دریافت کرده بتوانند. • گراف توابع ناطق را رسم کرده بتوانند. • در ترسیم گراف توابع ناطق از مجانب‌ها استفاده کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از گراف‌های توابع ناطق استفاده کرده بتوانند. • اهمیت گراف توابع ناطق را در حل مسایل ریاضی درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه ...
مواد درسی و مواد ممددرسی	کتاب درسی، تخته ، چارت و ... .
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت‌های مقدماتی، از روی چارت شکل ورودی و یا به روی تخته گراف‌های تابع ناطق نشان داده شود.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس غرض ایجاد انگیزه می‌باشد، معلم محترم می‌تواند در مورد سؤال‌ها با شاگردان همکاری و رهنمایی کند، بعد از تعریف توابع ناطق و طریق دریافت ناحیهٔ تعریف تابع ناطق مثال اول باسهم گیری شاگردان کار شود بعد فعالیت صفحهٔ(130) را شاگردان در گروپ‌ها اجرا کنند.

استاد محترم مثال دوم را حل کند و شاگردان فعالیت صفحهٔ(131) را اجرا کنند، بعد استاد محترم، طریق ترسیم گراف تابع ناطق در مثال سوم و یافتن مجانب عمودی را توضیح کند و باسهم گیری شاگردان مثال چهارم را حل کند. بعد از تعریف مجانب افقی و طریق دریافت کمیات وضیعه نقاط تقاطع گراف با محورها، مثال‌های پنجم وششم را کار کنند.

یکی از شاگردان روی تخته گراف مربوط فعالیت صفحهٔ(135) را ترسیم نماید، استاد محترم بعد از تعریف مجانب مایل باسهم گیری شاگردان مثال‌های هفتم و هشتم را حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

مجانب افقی و مجانب عمودی تابع ناطق $F(x)=\dfrac{3x-6}{5-2x}$ را دریابید.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

مجانب عمودی و افقی توابع ناطق $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$ و $h(x)=\frac{2x^3-x}{x^3+1}$ را دریابید.

معلومات اضافی برای معلم

1- ناحیهٔ تعریف توابع ناطق: اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد در این صورت باید $Q(x)\neq 0$ باشد تمام x های از R که $Q(x)\neq 0$ شود عبارت از ناحیهٔ تعریف $f(x)$ می باشند. اگر ناحیهٔ تعریف $f(x)$ را به D_f نشان دهیم.

$D_f=\{x/x\in R: Q(x)\neq 0\}$

غرض وضاحت موضوع به مثال های ذیل توجه کنید.

مثال: ناحیهٔ تعریف $g(x)=\frac{x}{x-1}$ و $h(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4+x^2+1}$ را تعیین کنید.

$x-1=0\Rightarrow x=1 \qquad D_g=R-\{1\}$

$x=0\Rightarrow D_h=R-\{0\}$

مثال: ناحیهٔ تعریف $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+6}$ را تعیین کنید.

$x^2+x+6=0\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow x=-3$ یا $x=2$

$D_f=R-\{-3,2\}$

- ناحیهٔ تعریف $g(x)=\frac{x+2}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ را تعیین کنید.

$x(x+1)(x+2)(x+3)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-1$ یا $x=-2$ یا $x=-3$

$D_g=R-\{0,-1,-2,-3\}$

متوجه باید بود که قبل از تعیین ناحیهٔ تعریف نمی توانیم که $(x+2)$ را از صورت و مخرج حذف نماییم و بعد از تعیین ناحیهٔ تعریف این کار امکان پذیر است.

- ناحیهٔ تعریف $h(x)=\frac{x}{x^3-x}$ را تعیین کنید.

$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-1$ یا $x=1$

$D_h=R-\{0,-1,1\}$

2- تعیین کردن ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های توابع ناطق یا توابع کسری:

چون در $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ پولینوم ها می باشند $Q(x)\neq 0$ و $Q(x)$ عدد ثابت نیست. غرض تعیین کردن ناحیهٔ تعریف جذر های مخرج را از اعداد حقیقی کم می کنیم و تعیین ناحیهٔ قیمت ها بعضی اوقات که درجه های حدود آن بزرگ باشد امکان پذیر نیست. اما از بعضی توابع را می توانیم به طریق مختلف به دست آورد.

مثال: ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را به دست آورید.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$D_f = R-\{-1\}$

$y=\frac{2x}{x+1} \Rightarrow xy+y=2x \Rightarrow xy-2x=-y$

$x(y-2)=-y \Rightarrow x=\frac{y}{2-y}$

$R_f = R-\{2\}$

مثال: ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های تابع $y=\frac{1}{x^2-2x}$ را به دست آورید.

حل:

$x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

$D=R-\{0,2\}$

$yx^2-2xy=1 \Rightarrow yx^2-2xy-1=0$

$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+y}}{y} \qquad y^2+y\geq 0 \Rightarrow y(y+1)\geq 0$

$\Rightarrow y\leq -1$ یا $y\geq 0$

صفر در ناحیهٔ قیمت ها شامل نمی باشد؛ زیرا اگر در تابع $y=\frac{1}{x^2+2x}$ به غوض y صفر قرار داده شود؛ قیمت برای x به دست نمی آید.

$R=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

مثال: ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های تابع حقیقی $y=\frac{x-1}{2x+3}$ را به دست آورید.

$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \qquad D=R-\{-\frac{3}{2}\}$

$y=\frac{x-1}{2x+3} \Rightarrow 2xy+3y=x-1 \Rightarrow (2y-1)x=-3y-1$

$x=\frac{-3y-1}{2y-1} \qquad 2y-1\neq 0 \Rightarrow y\neq\frac{1}{2}$

$Range = R-\{\frac{1}{2}\}$

زیرا x یک عدد حقیقی است.

مثال: ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت های تابع $f(x)=\frac{x^{50}-x}{x-x^{50}}$ را تعیین کنید.

$x-x^{50}=0 \Rightarrow x(1-x^{49})=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=1$

$D_f = R-\{0,1\}$

$y=\frac{x^{50}-x}{x-x^{50}}=\frac{x^{50}-x}{-(x^{50}-x)}=-1$

$R_f=\{-1\}$

که این یک تابع ثابت است.

3- رسم کردن گراف توابع ناطق (Graphing Rational Functions):

1- مخرج تابع را مساوی به صفر قرار دهید و برای x حل کنید. اگر با قیمت x=a مخرج تابع صفر گردد، پس x=a مجانب عمودی تابع می باشد.

2- مجانب های دیگری را جستجو کنید که در آن صورت سه حالت ذیل امکان دارد.

a – اگر درجۀ صورت از مخرج کوچکتر باشد در ا ین صورت y=0 عبارت از مجانب افقی می باشد.

b- اگر درجۀ صورت و مخرج باهم مساوی باشند یا شکل تابع طور ذیل باشد.

$$f(x)=\frac{a_n x^n+\dots a_0}{b_n x^n+\dots+b_0}$$

پس $y=\frac{a_n}{b_n}$ یک مجانب افقی تابع می باشد.

c- اگر درجۀ صورت به اندازۀ یک ازدرجۀ مخرج زیاد باشد، درین صورت مجانب افقی ندارد و مجانب مایل دارد که از تقسیم کردن صورت بر مخرج به دست می آید.

3- نقاط تقاطع با محور های x و y را دریابید.

4- چند نقاط دیگری را تعیین کنید.

5- گراف را مکمل نمایید.

جواب به سؤال های تمرین

1 – مجانب های عمودی و افقی تابع $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$ را دریابید.

حل:مجانب عمودی: $x^2-4=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=-2$

چون به قیمت های $x=-2$ و $x=2$ مخرج تابع صفر میگردد؛ پس خطوط مذکور مجانب عمودی تابع میباشند.

مجانب افقی:چون درجه های صورت و مخرج باهم مساوی اند؛ پس نسبت ضرایب بلند ترین توان های صورت و مخرج مجانب افقی میباشد. یعنی $y=\frac{3}{1} \Rightarrow y=3$

2 – آیا تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ مجانب عمودی دارد؟ چرا؟

حل: چون مخرج تابع به هیچ قیمت x صفر نمیشود $x^2+1\neq 0$ پس مجانب عمودی ندارد.

3 – ناحیۀ تعریف توابع داده شده ذیل را دریابید و نیز معادله های مجانب های عمودی آن ها را بنویسید.

$a: f(x)=\frac{5x}{x-4}\qquad b: g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\qquad c: h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\qquad d: k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$

حل جزءa: $dom\, f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 4\}$ و معادلۀ مجانب عمودی آن خط مستقیم $x=4$ میباشد.

حل جزءb: $dom\, g=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 5,\ x\neq -4\}$

و معادله های مجانب عمودی آن. $x=5$ و $x=-4$ میباشند که دو مجانب عمودی دارد.

حل جزءc:

$x^2-49=0 \qquad x=\pm 7$

$dom\, h=\{x / x\in IR \ , \ x\neq -7 \ , \ x\neq 7\}$

معادله های مجانب های عمودی تابع $x=7$ و $x=-7$ میباشند.

حل جزء d: چون مخرج تابع به هر قیمت x از اعداد حقیقی خلاف صفر میباشد؛ پس تابع مجانب عمودی ندارد $dom\, k = IR$ میباشد.

4 – مجانب های عمودی توابع ذیل را (اگر داشته باشد) دریابید.

$a:\ f(x)=\dfrac{x}{x+4} \qquad b:\ g(x)=\dfrac{x+3}{x(x+4)} \qquad c:\ h(x)=\dfrac{x}{x(x+4)} \qquad d:\ k(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

حل جزء a: خط مستقیم $x=-4$ عبارت از مجانب عمودی تابع $f(x)$ می باشد.

حل جزء b: خطوط مستقیم $x=0$ و $x=-4$ عبارت از مجانب های عمودی تابع $g(x)$ می باشند.

حل جزء c: خطوط مستقیم $x=0$ و $x=-4$ مجانب های عمودی تابع $h(x)$ می باشند.

حل جزء d: تابع $k(x)$ مجانب عمودی ندارد؛ زیرا به هر قیمت x مخرج خلاف صفر می باشد.

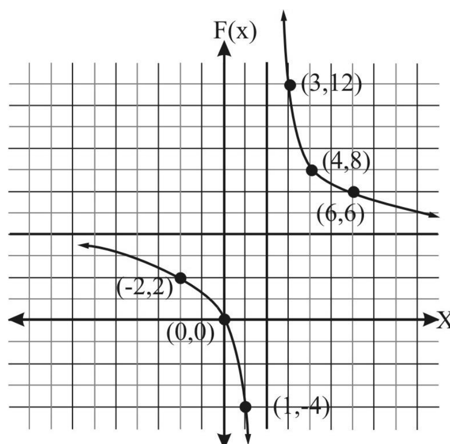
5 – گراف توابع ناطق ذیل رسم کنید.

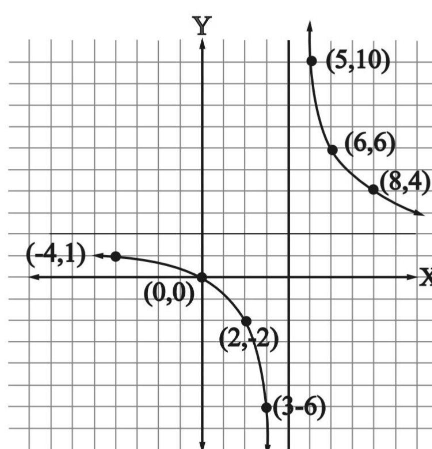
$a:\ y=\dfrac{4x}{x-2}$

x	0	−2	6	4	10	1	3
f(x)	0	2	6	8	5	−4	12

$b:\ g(x)=\dfrac{2x}{x-4}$

x	0	2	−4	2	12	8	6	5	3
g(x)	0	−2	1	−2	3	4	6	10	−6





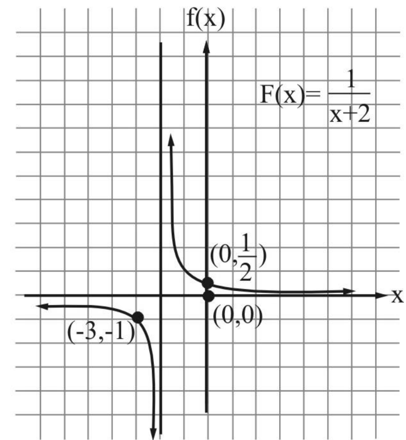
6- مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ عبارت است از:

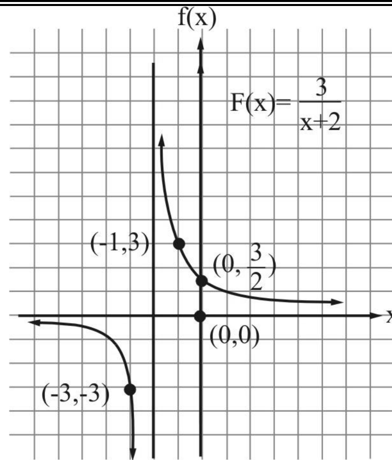
a: $y=2$ (b:) $y=3$

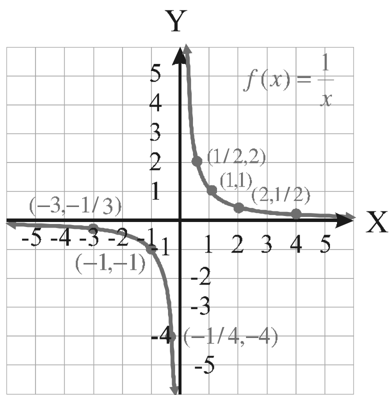
c: $y=-2$ d: $y=-3$

خط مستقیم $y=3$ مجانب افقی تابع میباشد جواب درست b است.

7- گراف توابع $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ و $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ را رسم کنید و با گراف تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ مقایسه کنید.







x	0	-1	-3
$f(x)=\frac{3}{x+2}$	$\frac{3}{2}$	3	-3

x	0	-1	-3	-4
$f(x)=\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$

8- مجانب مایل تابع $y=\frac{x^2}{x-1}$ را دریابید.

خط مستقیم $y=x$ عبارت از مجانب مایل تابع میباشد.

حل تمرین فصل

1- کدام یک از ست های جوره های مرتب زیر تابع را نشان می دهد ناحیه های تعریف و قیمت های آن ها را تعین کنید.

$a- \quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$
$b- \quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$
$c- \quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$
$d- \quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

حل جزء a: ست اول تابع را نشان می دهد؛ زیرا هر عنصر از Domain محض به یک عنصر از Range ارتباط دارد.

$dom=\{1,3,5\}\ ,\ Range=\{2,4,5\}$

حل جزء b: تابع نمی باشد؛ زیرا عنصر 3, دو تصویر دارد و عنصر 4 از Domain نیز دو تصویر دارد.

$dom=\{3,4\} \quad Range=\{4,5\}$

حل جزء c: تابع را نشان میدهد.

$dom=\{-3,-2,-1,0\} \quad Range=\{-3,-2,-1,0\}$

حل جزء d: تابع را نشان نمی دهد عنصر 1 از Domain با سه عنصر Range ارتباط دارد:

$dom=\{1\},\ Range=\{4,5,6\}$

2- اگر $g(x)=x^2+2x+3$ باشد $g(-x), g(-1)$ و $g(x+5)$ را دریابید.

حل:

$g(-1)=(-1)^2+2(-1)+3=1-2+3=2$
$g(-x)=(-x)^2+2(-x)+3=x^2-2x+3$
$g(x+5)=(x+5)^2+2(x+5)+3=x^2+10x+25+2x+10+3=x^2+12x+38$

3- اگر $h(x)=x^4+x^2+1$ باشد $h(-x), h(-1), h(2)$ و $h(3a)$ را دریابید.

حل: مانند سؤال شماره 2 حل میگردد به عوض x قیمت های آنرا وضع میکنیم.

4- ناحیه تعریف توابع ذیل را دریابید.

$a: \quad f(x)=2x \qquad dom\,f=IR$

$b: \quad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}} \qquad dom\,f=[3,+\infty)$

$c: \quad f(x)=\sqrt{16-x^2} \qquad 16-x^2\geq 0 \Rightarrow (4-x)(4+x)\geq 0$

$dom\,f=\{x/x\in IR\ ,\ -4\leq x\leq 4\}=[-4,4]$

$d: \ f(x)=\dfrac{2}{x^2-4} \quad dom\,f=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 2, x\neq -2\}$

یا به شکل انتروال:

$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

یا $IR\setminus\{-2,2\}$

$e: \quad f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}} \quad , \quad dom\, f = IR$

$f: \quad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

$dom\, f=\{x / x^2-4x-5 \geq 0, \quad x \leq -1,\ x \geq 5\}=(-\infty,-1]\cup[5,\infty)$

5- اگر $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$ باشد، $f(0), f(3)$ و $f(-2)$ را دریابید.

حل:

$f(0)=4\cdot 0+7=7$

$f(3)=4\cdot 3+7=19$

$f(-2)=-2+3=1$

6- اگر $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x \geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ باشد، $g(-6), g(0)$ و $g(-3)$ را دریابید.

حل:

$g(0)=0+3=3$

$g(-6)=-(-6+3)=6-3=3$

$g(-3)=-3+3=0$

7- اگر $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : \quad x \neq 3 \\ 6 & : \quad x=3 \end{cases}$ باشد، $h(0), h(3)$ و $h(5)$ را دریابید.

حل:

$h(3)=6$

$h(0)=\dfrac{-9}{-3}=3$

$h(5)=\dfrac{25-9}{5-3}=\dfrac{16}{2}=8$

8- کدام یک از معادله های زیر یک تابع را تعریف می کند:

$a: \quad x+y=16 \qquad b: \quad x^2+y=16$

$c: \quad x^2+y^2=16 \qquad d: \quad x=y^2$

$e: \quad y=\sqrt{x+4} \qquad f: \quad x+y^3=8$

حل جزء a: معادله $x+y=16$ یک تابع را نشان می دهد؛ زیرا به هر قیمت x یا Domain یک y یا یک تصویر در Range موجود است.

حل جزء b: $x^2+y=16 \rightarrow y=16-x^2$ نیز تابع را نشان می دهد.

حل جزء c: $x^2+y^2=16$ تابع را تعریف نمی کند؛ زیرا برای هر x از Domain دو قیمت y در Range موجود است و از نگاه گراف هم معادلهٔ دایره میباشد که هرخط موازی با محور y گراف را در دو نقطه قطع می کند.

حل جزء d: $y^2=x$ تابع نمی باشد.

حل جزء e: $y=\sqrt{x+4}$ یک تابع را ارائه میکند؛ زیرا هر عنصر Domain یا x محض به یک عنصر Range و یا y را بطه دارد.

حل جزءf: $x+y^3=8$ نیز یک تابع را نشان میدهد؛ زیرا هر عنصر Domain بایک عنصر Range رابطه دارد.

9- در توابع زیر کدام یک تابع طاق، کدام یک تابع جفت و کدام یک نه جفت و نه طاق می باشد؟

$a: \quad f(x)=x^4-2x^2+5 \qquad b: \quad f(x)=x^2+2x-1 \qquad c: \quad f(x)=\dfrac{2}{x-6}$

حل جزءa: $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+5=x^4-2x^2+5$ چون: $f(-x)=f(x)$ پس تابع $f(x)$ تابع جفت می باشد.

حل جزءb: $f(-x)=(-x)^2+2(-x)-1=x^2-2x-1$ به خوبی آشکار است که تابع مذکور نه جفت می باشد و نه طاق.

حل جزءc: $f(-x)=\dfrac{2}{x-6}=-\dfrac{2}{-x+6}$ این تابع نیز نه جفت میباشد و نه طاق.

10- گراف های توابع $f(x)=x^2-1$ و $f(x)=(x-1)^2$ را رسم و با گراف $f(x)=x^2$ مقایسه کنید.

$f(x)=x^2$

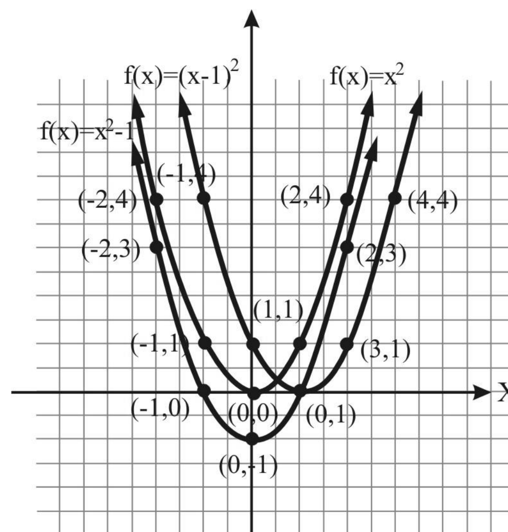
x	0	1	2	-2	-1
$f(x)$	1	1	4	4	1

$f(x)=(x-1)^2$

x	0	1	2	3	-1
$f(x)$	1	0	1	4	4

$f(x)=x^2-1$

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)$	-1	0	3	0	3



مشاهده می شود که گراف تابع $f(x)=x^2$ به اندازه یک واحد به طور عمودی پایین انتقال کند گراف تابع $f(x)=x^2-1$ به دست می آید و اگر به اندازه یک واحد طور افقی به طرف راست انتقال شود گراف تابع $f(x)=(x-1)^2$ به دست می آید.

11- $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ و $(\frac{f}{g})$ توابع زیر را دریابید و ناحیهٔ تعریف هر یک را نیز تعیین کنید.

$a: \ f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3 \qquad b: \ f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$c: \ f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

حل جزءa:

$f+g=4x-1+6x+3=10x+2$

$dom(f+g)=dom\,f\cap dog=IR\cap=IR$

$f-g=(4x-1)-(6x+3)=-2x-4$

$dom(f-g)=dom\,f\cap dog=IR\cap IR=IR$

$$f \cdot g = (4x-1)(6x+3) = 24x^2 + 12x - 6x - 3 = 24x^2 + 6x - 3$$
$$dom(f \cdot g) = dom f \cap dom = IR \cap IR = IR$$
$$\frac{f}{g} = \frac{4x-1}{6x+3} \quad , \quad dom(\frac{f}{g}) = dom f \cap dom g \setminus \{x / g(x) \neq 0\}$$
$$6x+3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$
$$dom\frac{f}{g} = IR \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2} + \infty)$$

حل جزءb:

$$f + g = \sqrt{2x+5} + \sqrt{4x-9}$$
$$dom f = \left\{x / 2x+5 \geq 0 \, , \quad x \geq -\frac{5}{2}\right\} = [-\frac{5}{2}, \infty)$$
$$dom g = \left\{x / 4x-9 \geq 0 \, , \quad x \geq \frac{9}{4}\right\} = [\frac{9}{4}, \infty)$$
$$dom(f+g) = \left[\frac{9}{4}, \infty\right)$$
$$dom(f-g) = dom f \cap dom g = \left[\frac{9}{4}, \infty\right) \qquad (f-g)(x) = \sqrt{2x+5} - \sqrt{4x-9}$$
$$dom(f \cdot g) = dom f \cap dom g = \left[\frac{9}{4}, \infty\right) \qquad (f \cdot g)(x) = \sqrt{8x^2 - 18x + 20x - 45} = \sqrt{8x^2 + 2x - 45}$$
$$dom(\frac{f}{g}) = (\frac{9}{4}, \infty) \qquad (\frac{f}{g})(x) = \sqrt{\frac{2x+5}{4x-9}}$$

حل جزءc:

$$f + g = (4x^2 - 11x + 2) + (x^2 + 5) = 5x^2 - 11x + 7$$
$dom(f-g) = IR$ یا $(-\infty, \infty)$

$$f - g = (4x^2 - 11x + 2) - (x^2 - 5) = 3x^2 - 11x + 7`$$
$dom(f-g) = IR$ یا $(-\infty, \infty)$

$$(f \cdot g) = (4x^2 - 11x + 2)(x^2 + 5) = 4x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 55x + 10$$
$dom(f \cdot g) = IR$ یا $(-\infty, \infty)$

$$\frac{f}{g} = \frac{4x^2 - 11x + 2}{x^2 + 5}$$
$$dom f = IR \quad \cdot \quad dom g = IR$$
$$dom\frac{f}{g} = IR \quad (-\infty, +\infty)$$
$dom\frac{f}{g} = \{x / x \in IR \, , \; x \neq \sqrt{5} \, , \; x \neq -\sqrt{5}\}$ یا

12- اگر $f(x) = 4x^2 - 2x$ و $g(x) = 8x + 1$ باشد ؛پس:

$(f+g)(3) \quad , \quad (f+g)(-5) \quad , \quad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \quad , \quad (fog)(2) \quad , \quad (gof)(-5)$

را دریابید.

حل:

$$f+g=4x^2+6x+1 \;,\; (f+g)(3)=36+18+1=55$$
$$(f+g)(-5)=4(-5)^2+6(-5)+1=100-30+1=71$$
$$f\cdot g=(4x^2-2x)(8x+1)=32x^3-12x^2-2x$$
$$(f\cdot g)(4)=32(4)^3-12(4)^2-2(4)=1848$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{4x^2-2x}{8x+1} \Rightarrow (\frac{f}{g})(4)=\frac{64-8}{32+1}=\frac{65}{33}$$
$$f\,o\,g=f(8x+1)=4(8x+1)^2-2(8x+1)=256x^2+64x+4-16x-2=256x^2+50x+2$$
$$(f\,o\,g)(2)=256\cdot 4+50\cdot 2+2=1024+100+2=1126$$
$$g\,o\,f=g(4x^2-2x)=8(4x^2-2x)+1=32x^2-16x+1$$
$$(g\,o\,f)(-5)=32(-5)^2-16(-5)+1=800+80+1=881$$

13- $F\,o\,g$ و $g\,o\,f$ را دریابید اگر:

$a:\quad f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1 \qquad\qquad b:\quad f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$c:\quad f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x \qquad\qquad d:\quad f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$e:\quad f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

حل:

$a:\quad (f\,o\,g)(x)=f(3x-1)=8(3x-1)+12=24x+4$

$\quad (g\,o\,f)(x)=g(8x+12)=3(8x+12)-1=24x+35$

$b:\quad (f\,o\,g)(x)=f(-x^2+4x+3)=5(-x^2+4x+3)+3=-5x^2+20x+15+3=-5x^2+20x+18$

$\quad (g\,o\,f)(x)=g(5x+3)=-(5x+3)^2+4(5x+3)+3=-25x^2-30x-9+20x+12+3$

$\quad\quad =-25x^2-10x+6$

$c:\quad (f\,o\,g)(x)=f(4x)=-(4x)^3+2=-64x^3+2$

$\quad (g\,o\,f)(x)=g(-x^3+2)=4(-x^3+2)=-4x^3+8$

$d:\quad (f\,o\,g)(x)=f(x^2)=\frac{1}{x^2}$

$\quad (g\,o\,f)(x)=g(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2=\frac{1}{x^2}$

$e:\quad (f\,o\,g)(x)=f(8x^2-6)=\sqrt{8x^2-6+2}=\sqrt{8x^2-4}=\sqrt{4(2x^2-1)}=2\sqrt{2x^2-1}$

$\quad (g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x+2})=8(\sqrt{x+2})^2-6=8x+16-6=8x+10$

14- با در نظرداشت گراف تابع y=f(x) بگویید که گراف تابع y=f(x)-5 به اندازه 5 واحد:

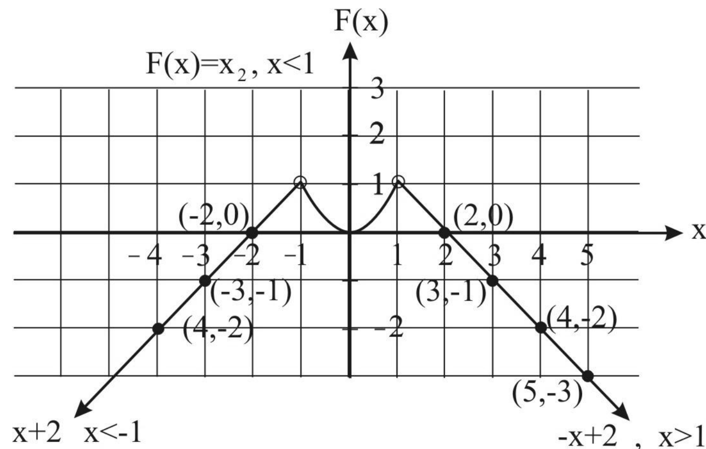
a- به طرف پایین انتقال شده است. b- به طرف بالا انتقال شده است.

c- به طرف راست انتقال شده است. d- به طرف چپ انتقال شده است.

حل: جواب درست جزء a میباشد.

15-اگر تابع f(x) طور زیر تعریف شده باشد گراف آن را رسم و ناحیه های تعریف و ناحیه قیمت های آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>1 \\ x^2 & -1<x<1 \\ x+2 & x<-1 \end{cases}$$



$dom\ f=\{x / x\in IR\ ,\ x\neq -1, x\neq 1\}=IR-\{-1,1\}$

ویا $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

و ناحیهٔ قیمت های f عبارت است از:

$Range\ f=(-\infty,1)=\{y / y\in IR\ ,\ y<1\}$

16- ساحهٔ تعریف و ساحه قیمت های تابع $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ را تعیین کنید.

$dom\ f(x)=\{x / x\in IR\ ,\ x\neq -1\}=IR\setminus\{-1\}$

ویا $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

ساحه قیمت ها:

$y=\dfrac{2x}{x+1}\Rightarrow yx+y=2x$

یا $-yx+2x=y\Rightarrow(2-y)x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{2-y}$

$Rang\ f(x)=IR\setminus\{2\}$

$=\{y / y\in IR\ ,\ y\neq 2\}$

یا $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

17- ساحهٔ تعریف و ساحه قیمت های تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ را تعیین کنید.

حل:

$dom\ f=\left\{x / x\in IR\ ,\ x\geq\dfrac{1}{2}\right\}=\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$

$Range\ f=[0,\infty)$ یا $y\geq 0$

18- ساحه های تعریف توابع ناطق زیر را دریابید و اگر مجانب عمودی داشته باشند، معادله های مجانب های عمودی را نیز به دست آورید.

$f(x)=\frac{5x}{x-4}$ $\quad g(x)=\frac{7x}{x-8}$ $\quad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64}$ $\quad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49}$ $\quad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$

حل:

$dom\, f(x) == IR \setminus \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

و معادلهٔ مجانب عمودی آن $x=4$ می باشد.

$dom\, g(x) = IR \setminus \{8\} = (-\infty, 8) \cup (8, \infty)$

معادلهٔ مجانب عمودی آن $x=8$ می باشد.

$dom\, h(x) = IR \setminus \{-8, 8\} = \{x / x \in IR, x \neq -8, x \neq 8\}$

و دو مجانب عمودی دارد که معادلات آنها:

$x=-8$ و $x=8$ می باشد

$dom\, f(x) = IR$ ویا $(-\infty, \infty)$

و مجانب عمودی ندارد زیرا به هیچ قیمت x مخرج تابع صفر نمی شود.

$dom\, g(x) = IR \setminus \{-7, 7\}$ ویا $\{x / x \in IR, x \neq -7, x \neq 7\}$

و دو مجانب عمودی دارد که معادلات آنها عبارت از $x=-7$ و $x=7$ می باشد.

$dom\, h(x) = IR \setminus \{6, -6\}$ $\qquad$ $dom\, h(x) = \{x / \in IR\ ,\ x \neq 6\ \wedge\ x \neq -6\}$

و دو مجانب عمودی دارد: $x=6$ و $x=-6$

19-گراف های توابع $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ و $f(x)=x^2-2$ را در عین سیستم کمیات وضعیهٔ رسم و با گراف تابع $f(x)=x^2$ مقایسه کنید.

حل:

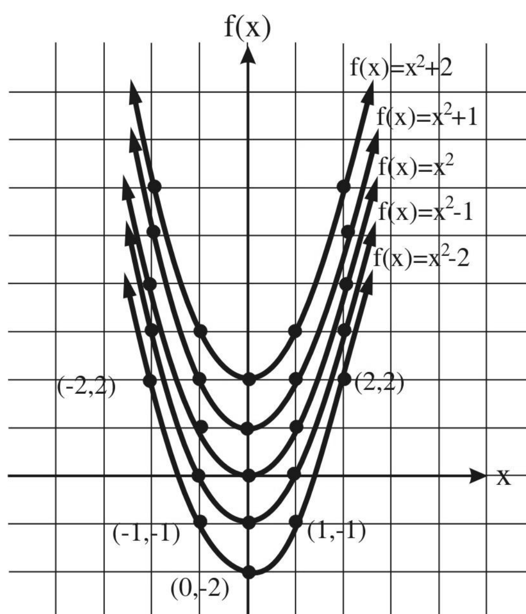
x	0	1	2	−2	−1
$f(x)=x^2$	0	1	4	4	1

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)=x^2+1$	1	2	5	2	5

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)=x^2-1$	−1	0	3	0	3

x	0	1	−1	2	−2
$f(x)=x^2+2$	2	3	3	6	6

x	0	1	2	−2
$f(x)=x^2-2$	−2	−1	2	2



اگر گراف تابع $f(x)=x^2$ به اندازه دو واحد به طرف بالا انتقال شود و گراف تابع $f(x)=x^2+2$ و اگر یک واحد به طرف بالا انتقال شود گراف $f(x)=x^2+1$ و اگر یک واحد به طرف پایین انتقال شود گراف $f(x)=x^2-1$ و اگر دو واحد به طرف پایین انتقال شود گراف تابع $f(x)=x^2-2$ به دست می آید.

20- کمیات وضعیه رأس ها و معادله های تناظر توابع درجه دوم زیر را دریابید.

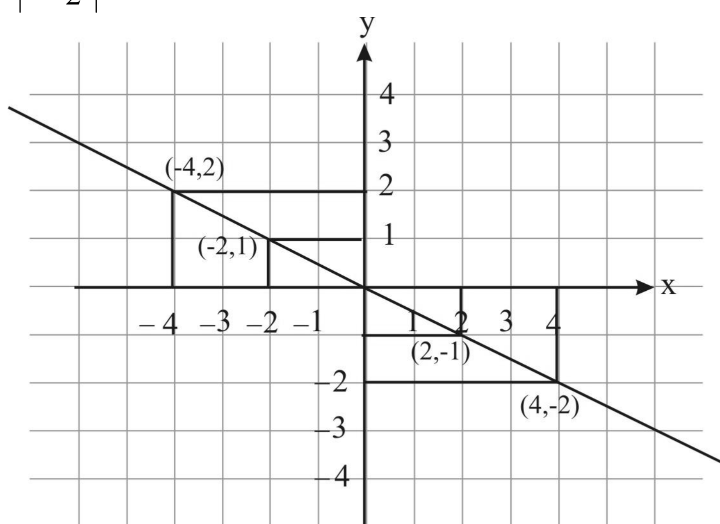
$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

حل:a: کمیات وضعیهٔ رأس (2,0) و معادلهٔ محور تناظر آن $x=2$ می باشد.

حل جزءb: رأس آن درنقطهٔ (-3,-4) و معادلهٔ محور تناظر آن $x=-3$ می باشد.

21-گراف تابع $y=-\frac{x}{2}$ را رسم کنید.

x	0	2	4	−2	−4
y	0	−1	−2	1	2



22- مجانب عمودی و مایل تابع $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ را دریابید.

حل: مجانب عمودی آن $x=-2$ و معادلهٔ مجانب مایل آن $y=x-2$ می باشد.

23- معادله مجانب افقی تابع، $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$ عبارت است از:

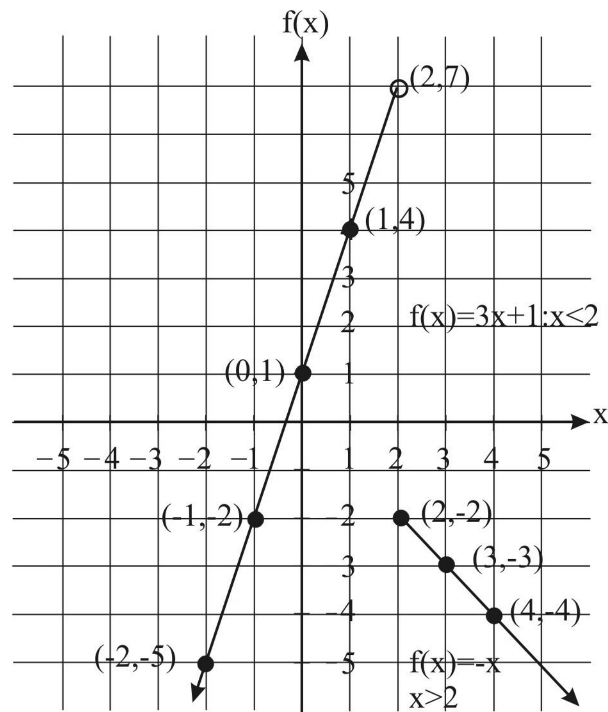
$a)\ y=-1 \qquad b)\ y=1 \qquad c)\ y=-\frac{1}{4} \qquad d)\ y=4$

جواب صحیح b می باشد.

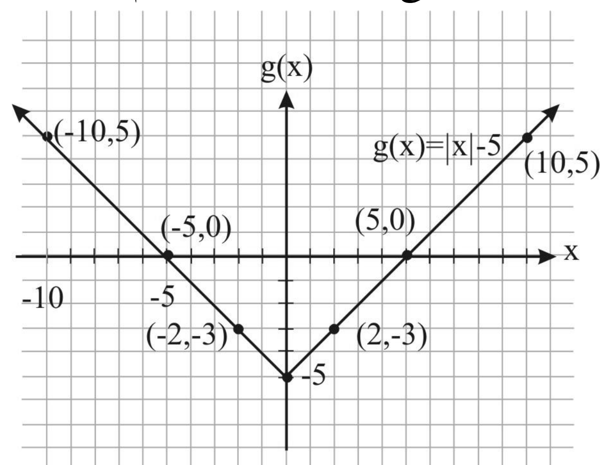
24- گراف تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ را رسم کنید.

x	1	0	−1	−2
f(x)	4	1	−2	−5

x	2	3	4
f(x)	−2	−3	−4



25- گراف تابع $g(x)=|x|-5$ را رسم و ناحیهٔ قیمت های این تابع را مشخص کنید.



$\text{Range}\, g(x)=[-5,+\infty)$

x	0	2	5	10	−2	−5	−10
f(x)	−5	−3	0	5	−3	0	5

26- در ناحیهٔ قیمت های تابع عنیت کدام اعداد شامل می باشند؟

حل: در ناحیه قیمت های تابع علامه (*sign fanction*) اعداد $\{-1,0,1\}$ شامل می باشند.

$\text{Rang sig n}=\{-1,0,1\}$

27- معکوس هر یک از توابع زیر را دریابید و نیز نشان دهید که $f(f^{-1}(x))=x$ می باشد.

$a:\quad f(x)=\frac{1}{8}x \qquad b:\quad f(x)=8x-1 \qquad c:\quad f(x)=x^2+6$

$d:\quad f(x)=\frac{4x+6}{5} \qquad e:\quad f(x)=x^3-1$

حل جزء a:

$y=\frac{1}{8}x \Rightarrow x=\frac{1}{8}y \Rightarrow y=8x$

$f^{-1}(x)=8x$ می باشد.

$f(f^{-1}(x))=f(8x)=\frac{1}{8}\cdot 8x=x$

حل جزءb:

$f(x) = 8x - 1$

$y = 8x - 1 \Rightarrow x = 8y - 1 \Rightarrow 8y = x + 1$

$$f^{-f}(x) = \frac{x+1}{8} \Leftarrow y = \frac{x+1}{8}$$

$f(f^{f-1}(x)) = f(\frac{x+1}{8}) = 8(\frac{x+1}{8}) - 1 = x + 1 - 1 = x$

حل جزءc:

$y = x^2 + 6 \Rightarrow x = y^2 + 6 \Rightarrow y^2 = x - 6$

معکوس این تابع تابع نمی باشد.

حل جزءd:

$y = \frac{4x+6}{5} \Rightarrow x = \frac{4y+6}{5}$ $\qquad 4y + 6 = 5x \Rightarrow y = \frac{5x-6}{4}$

$f^{-1}(x) = \frac{5x-6}{4}$

$f(x^{-1}(x)) = f(\frac{5x-6}{4}) = \frac{4\left(\frac{5x-6}{4}\right)+6}{5}$ $\qquad \frac{5x-6+6}{5} = \frac{5x}{5} = x$

حل جزءe:

$y = x^3 - 1 \Rightarrow x = y^3 - 1 \Rightarrow y^3 = x + 1$

$y = \sqrt[3]{x+1}$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3+1}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$

28- آیا تابع $g(x) = x^2$ معکوس پذیر می باشد (معکوس آن نیز یک تابع می باشد)

$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = y^2$

$y = \pm\sqrt{x}$ یا $g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

مشاهده می شود که $g^{-1}(x)$ یک تابع نمی باشد؛ زیرا اگر $x = 2$ و یا $x = -2$ باشد:

$g(2) = 4$ و $g(-2) = 4$ پس $g(x)$ یک تابع معکوس پذیر نمی باشد؛ یعنی معکوس آن تابع نمی باشد.

29- اگر $(fog)(x) = (gof)(x)$ باشد تابع f با g چی رابطه دارد؟

حل: اگر $(f o g)(x) = (g o f)(x)$ باشد تابع g معکوس تابع f می باشد.

30- کمیات وضعیه نقاط تقاطع تابع $g(x) = 3 - \frac{3}{2}x$ با محور های X و Y را دریابید.

حل: نقطهٔ تقاطع گراف با محور y : $x = 0 \Rightarrow y = 3$

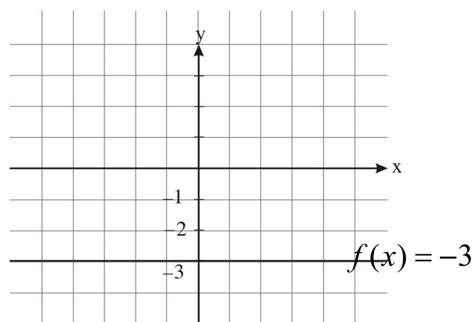
نقطهٔ $(0,3)$ تقاطع گراف این تابع با محور y می باشد.

تقاطع با محور x : $y = 0$: $3 - \frac{3}{2}x = 0$

$-\frac{3}{2}x = -3 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2$ یا نقطهٔ $(2,0)$ تقاطع با محور x می باشد.

31- گراف تابع $f(x)=-3$ را رسم کنید.

حل:



32- کمیات وضیعهٔ نقطه رأس گراف تابع $f(x)=2x^2+4x+5$ را دریابید.

حل:

$$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}) \qquad x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-16}{8}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

کمیات وضعیهٔ رأس پارابولا نقطهٔ (1,3) می باشد.

33- در عین سیستم کمیات وضعیه گراف های توابع :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ و $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ را رسم و با گراف تابع $f(x)=x^2$ مقایسه کنید.

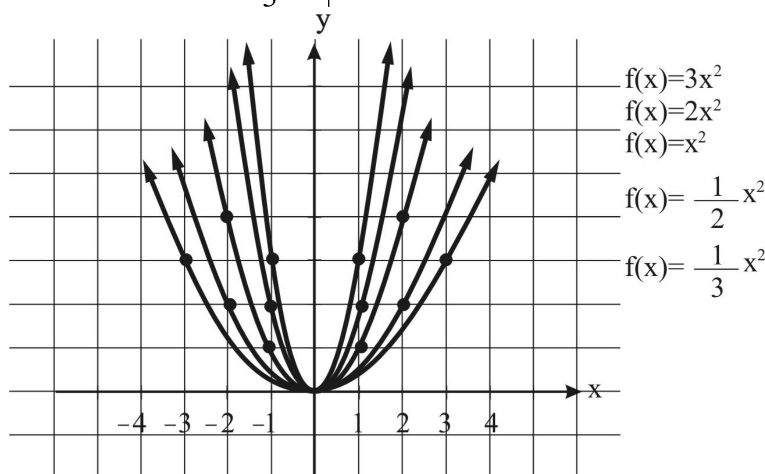
حل:

x	0	1	−1	2	−2
$2x^2$	0	2	2	8	8

x	0	1	−1	2	−2
$3x^2$	0	3	3	12	12

x	0	3	−3
$\frac{1}{3}x^2$	0	3	3

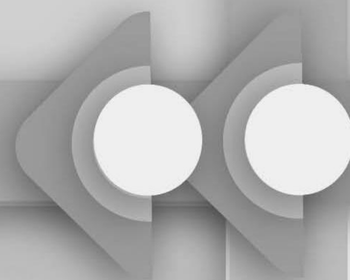
x	0	1	−1	2	−2
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



34- معادله مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ عبارت است از:

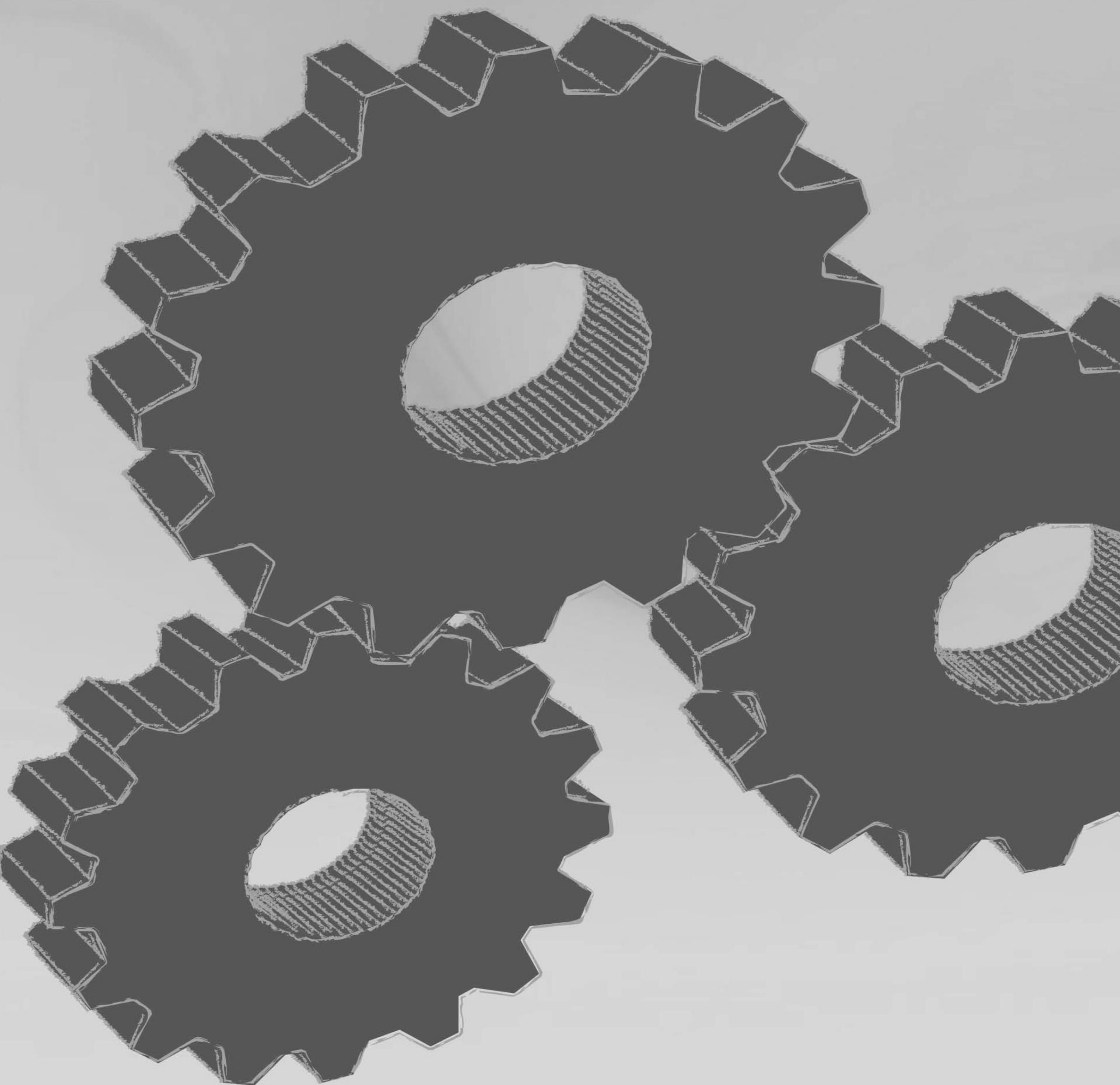
a: $y=x$ b: $y=x-1$ c: $y=x+1$

حل: جواب درست جزء a می باشد.



فصل چهارم
توابع مثلثاتی







زاویه و رادیان

صفحهٔ کتاب: (149)   وقت تدریس (3 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان باید در اخیر این درس:
- دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• زاویه مثبت ومنفی را در مثلثات بشناسند. • واحد های اندازه گیری زاویه را بشناسند وتعریف درجه، گراد و رادیان را بدانند. • ارتباط بین زاویه مرکزی وقوس مقابل را فراگیرند ودایره مثلثاتی را تعریف کرده بتوانند. • زاویه های مثبت ومنفی را رسم کرده بتواند. • شکل اعشاری درجه را به (DMS) و (DMS) را به شکل اعشاری درجه تبدیل کرده بتوانند. • اندازه زاویه ها را از یک واحد به واحد دیگری تبدیل کرده بتوانند. • بفهمند که یک دوران چند درجه، چند گراد و چند رادیان میشود. • درحل مسایل مثلثات اهمیت تبدیل واحد های اندازه گیری زاویه را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال وجواب، کارهای گروپی وانفرادی، مباحثه و ...
مواد ممد درسی	کتاب، تخته، چارت، بکس هندسی و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود.که در هندسه زوایای منفی وجود ندارد ودرمثلثات زوایایی منفی ومثبت وجود دارد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه:

استاد محترم از روی چارت ویا به روی تخته مفهوم زوایایی مثبت ومنفی رابه شاگردان توضیح کند وباسهم گیری شاگردان زوایایی مثال اول صفحه (150) این درس را رسم کند، زوایایی فعالیت این صفحه را شاگردان رسم کنند. همچنین استاد مثال دوم راحل کند وشاگردان فعالیت صفحه (151) را کار کنند. بعد از تعریف گراد استاد مثال سوم صفحه (151) را باسهم گیری شاگردان حل کند رادیان تعریف شود ورابطه بین زاویه مرکزی وطول قوس مقابل توضیح گردد. استاد محترم مثال چهارم را حل کند وفعالیت صفحه (153) توسط یک شاگرد روی تخته حل شود. ارتباط درجه وگراد با رادیان وتبدیل کردن آن ها باهم دیگر توسط فورمول توضیح گردد. مثال پنجم وسؤال این صفحه روی تخته باسهم گیری شاگردان حل شود. مثال ششم توسط یکی از شاگردان روی تخته حل شود وارتباط درجه ورادیان درچارت صفحه (156) توضیح گردد، فعالیت صفحه (156) را در گروپ ها شاگردان حل کنند.

استاد محترم مثال های هفتم وهشتم را با سهم گیری شاگردان حل وتوضیح نماید.

تحکیم درس (7) دقیقه:

غرض تحکیم درس سؤالات ذیل حل گردد.

زوایای ذیل که به رادیان داده شده اند به درجه تبدیل شود.

$\frac{\pi}{5},\ -\frac{\pi}{10},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{45},\ -\frac{5\pi}{12},\ \frac{27\pi}{5}$

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه:

- زوایایی ذیل رابه رادیان تبدیل کنید.

$36^\circ, 6^\circ, \quad -12^\circ, 75^\circ, 135^\circ, \quad -225^\circ, 930^\circ$

- اگر قطر یک دایره 10 واحد باشد طول قوس مقابل زوایایی مرکزی زیر را دریابید.

$1^R,\ \ 2^R,\ \ 1.75^R,\ \ 22\,Radian$

معلومات اضافی

1- از کلمه مثلثات معلوم میگردد که اندازه گیری اجزأی مثلث است. به طور غیر مستقیم فاصله های، مانند ارتفاع کوها، عرض دریاهای عریض از یک طرف ساحل، دقت در حرکت ستاره گان و اندازه گیری زمان و ضرورت های فزیک این رشته از ریاضی را به وجود آورد.

تاریخ علوم نشان میدهد که دو هزار سال قبل از میلاد مسیح، با بلیها و مصری ها به کنجکاوی به حرکت آفتاب، ماه و ستارگان می نگریستند. سال را 360 روز می دانستند و از این لحاظ، دایره را هم به 360 حصه مساوی تقسیم می کردند. در نتیجه، درجه و اجزأی آن یعنی دقیقه و ثانیه، در جهان ریاضی به وجود آمد.

در قرن های قبل از میلاد مسیح، آسیای صغیر و یونان مرکزی در جستجوی این گونه مطالب علمی بود.

طالس (546-640 ق م) با آن که یک تاجر بود، با استفاده از عصایی خود، ارتفاع هرم های معروف مصر را اندازه کرد. این دانشمند در حقیقت علم مثلثات را پی ریزی کرد.

اقلیدس و شاگردان مکتب او، در حدود 300 سال قبل از میلاد مسیح، به مثلثات در دایره دست یافتند.

بطلیموس (170- 100 م) برای زاویه ها نسبت های یافت که به طول ضلع ارتباط ندارند. که امروز این نسبت ها را Cotangent, tangent, cosine, sine می نامیم بطلیموس در کتاب مشهور خود (المجسطی) این نسبت ها را نوشته بود و به کار میبرد.

در کتاب (Sphaerica) که منلائوس در حدود صد سال بعد از میلاد مسیح نوشته بود، اثری از مثلثات کروی دیده میشود. 300 سال بعد از میلاد، اقلیدس و شاگردان مکتب او مثلثات زمان خود را در مساحت ها و اندازه گیری فاصله ها به طور غیر مستقیم به کار میبردند. بعد از آن که چراغ علمی یونان و اسکندریه خاموش شد و خورشید تمدن اسلامی تابید در این وقت دو نفر دانشمندان هندی به نام آریا بها تا (Aryabhatas) (660-588 م) و بهاسکارا (Bhaskara) (متولد 1114 م) جدول ها را برای نسبت های مثلثاتی، که انها را به نام توابعی مثلثاتی یاد میکنند، تنظیم کردند که از دقت زیادی برخوردار است.

در زمان خلافت هارون رشید (890-786 م) کتاب های علمی از زبان یونانی و هندی به عربی ترجمه شد. و از این راه تمدن علمی اسلامی رشد بیشتر یافت. در کتاب های ابوریحان البیرونی دانش مثلثاتی موجود است
بعد از اینکه رُنسانس در غرب طلوع کرد، علمای از قبیل هنری جان نیر(1617-1550 م)، دیمور(1754-1667 م)، لئونارداویلر(1783-1707 م)، ژوزف فوریه(1830-1768 م)، گوس(1875-1777 م) دانش مثلثات را به اوج رسانیدند.

-2

$$146^\circ\ \ 18'\ 34''=146^\circ+\frac{18^\circ}{60}+\frac{34^\circ}{3600}=146^\circ+0.3^\circ+0.00944^\circ=146.30944^\circ$$

$$55.967663^\circ=55^\circ+(0.967663\cdot 60)'=55^\circ+58.05978'$$

$$=55^\circ+58'+(0.05978\cdot 60)''=55^\circ+58'+4''=55^\circ\ \ 58'\ \ 4''$$

3- قسمت های داده شده یک دوران برحسب درجه و رادیان مساوی است به:

$\frac{1}{9}\text{Re}\,v=40^\circ=(\frac{2\pi}{9})^R$ $\quad$ $\frac{2}{3}\text{Re}\,v=240^\circ=(\frac{4\pi}{3})^R$

$\frac{1}{18}\text{Re}\,v=20^\circ=(\frac{\pi}{9})^R$ $\quad$ $\frac{4}{5}\text{Re}\,v=288^\circ=(\frac{8\pi}{5})^R$ $\quad$ $\frac{1}{36}\text{Re}\,v=10^\circ=(\frac{\pi}{18})^R$

4- اگر قطر یک دایره 10m باشد، طول قوس های مقابل زاویه مرکزی داده شده ذیل مساوی است به:

$(3.8)\text{Radiam}\rightarrow 19\text{m}$ $\quad$ $(2.4)^R\rightarrow 12\text{m}$ $\quad$ $(45)^R\rightarrow 225\text{m}$

$(72)^R\rightarrow 360\text{m}$ $\quad$ $(4.28)^R\rightarrow 12.4\text{m}$ $\quad$ $(0.67)^R=3.35\text{m}$ $\quad$ $(\frac{7\pi}{4})^R=\frac{35\pi}{4}\text{m}$

$(\frac{\pi}{3})^R\rightarrow\frac{5\pi}{3}\text{m}$ $\quad$ $(\frac{2\pi}{3})^R\rightarrow\frac{10\pi}{3}\text{m}$ $\quad$ $(\frac{\pi}{4})^R=\frac{5\pi}{4}\text{m}$ $\quad$ $(\frac{7\pi}{6})^R=\frac{35\pi}{6}\text{m}$

5- مقدار زاویه های داده شده به رادیان بر حسب درجه مساوی اند به:

$\frac{\pi}{5}=36^\circ\ ,\quad -\frac{\pi}{10}=-18^\circ\quad ,\quad \frac{3\pi}{4}=135^\circ\quad ,\quad \frac{\pi}{45}=4^\circ$ (رادیان به درجه)

$6^\circ=(\frac{\pi}{30})^R\quad ,\ -12^\circ=(-\frac{\pi}{15})^R\quad ,\quad 75^\circ=(\frac{5\pi}{12})^R$ (درجه به رادیان)

$135^\circ=(\frac{3\pi}{4})^R\quad ,\ -225^\circ=(\frac{-5\pi}{4})^R\quad ,\quad 930^\circ=(\frac{31\pi}{6})^R$

6- عقربه ساعت گرد، در هر ساعت 30° زاویه را طی میکند. و این عقربه یک درجه را در (2') طی میکند، و در (28) دقیقه این عقربه قوس 14° را طی میکند. و در $\frac{2}{5}$ دقیقه قوس 12' را می پیماید.

7- زوایای زیر چند دوران (Rotations) یا کدام حصه یک دوران می شود؟

$45^\circ=\frac{1}{8}ccw\qquad 90^\circ=\frac{1}{4}ccw\qquad -180^\circ=\frac{1}{2}cw\qquad -270^\circ=\frac{3}{4}cw$

$450^\circ=1\frac{1}{4}ccw\qquad 720^\circ=2ccw\qquad -420^\circ=1\frac{1}{6}cw\qquad -640^\circ=1\frac{7}{9}cw$

(ccw) مخالف جهت حرکت عقربه ساعت، (cw) هم جهت حرکت عقربه ساعت.

(ccw)
C= Counter　　C= clock　　W= Wise

حل تمرین:

1- اگر قوس مقابل یک زاویهٔ مرکزی 50cm و شعاع دایره 25cm باشد، زاویه مرکزی چند رادیان می شود؟

حل:

$$\theta = \frac{S}{R} \Rightarrow \theta = \frac{50cm}{25cm} = 2\,Radian$$

2- $32,4222^o$ را به درجه، دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

حل: $32.4222^\circ = 32^\circ + 0.4222^\circ = 32^\circ + (0.4222 \cdot 60)' = 32^\circ\ 25' + (0.332 \cdot 60)'' = 32^\circ\ 25'\ \ 19.92''$

3- $\frac{1}{8}$ حصهٔ یک دوران چند رادیان، چند درجه و چند گراد می شود؟

حل: $a)\ \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$　　$b)\ \frac{1}{8} \cdot 400 = 50^g$　　$c)\ \frac{1}{8} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{4}^R$

4- $\frac{5\pi}{4}$ رادیان چند گراد و $-7,5^o$ چند رادیان می شود؟

حل:

$a)\ 2\pi^R = 400^g$　　$\frac{5\pi^R}{4} = \ x$　　$x^\circ = \frac{5\pi}{4} . 400 / 2\pi^R = 250^g$

$b)\ 2\pi^R = 360^\circ$　　$x^R = -7.5^\circ$　　$x^\circ = \frac{-7.5^\circ \cdot 2\pi^R}{360} = \frac{-15\pi^R}{360} = (-\frac{\pi}{24})^R$

5- $225^o, -315^o, 720^o$ و 45^o را به رادیان و گراد تبدیل کنید.

حل:

$a)\ 45^\circ = \frac{45 \cdot 2\pi}{360} = (\frac{\pi}{4})^R$　　$b)\ 720^\circ\ \frac{720^\circ\ \ 2\pi}{360} = 4\pi^R$

$c)\ -315^\circ\ = \frac{-315 \cdot 2\pi}{360} = (\frac{-7\pi}{4})^R$　　$d)\ 225^\circ = \frac{225 \cdot 2\pi}{360} = (\frac{5\pi}{4})^R$

6- معلوم کنید که $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ و $\frac{4}{5}$ حصهٔ یک دایره (یک دوران) چند رادیان و چند درجه می شود؟

حل:

$a)\ \frac{1}{9}\ \cdot 2\pi = (\frac{2\pi}{9})^R$　　$\frac{1}{9} \cdot 360 = 40^\circ$　　$b)\ \frac{1}{24} \cdot 2\pi = (\frac{\pi}{12})^R$　　$\frac{1}{24} \cdot 360^\circ = 15^\circ$

$c)\ \frac{1}{18} \cdot 2\pi = (\frac{\pi}{9})^R$　　$\frac{1}{18} \cdot 360^\circ = 20^\circ$　　$d)\ \frac{4}{5} \cdot 2\pi = (\frac{8}{5}\pi)^R$　　$\frac{4}{5} \cdot 360^\circ = 288^\circ$

7- $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ و $-\frac{5\pi}{12}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

حل:

$a)\ 2\pi^R = 360^\circ$　　$(\frac{11}{3}\pi)^R = x^\circ \ \Rightarrow\ x^\circ = \frac{\frac{11}{3}\pi \cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{11 \cdot 120}{2} = 660^\circ$

$b)\ (\frac{9\pi}{4})^R = \frac{\frac{9\pi}{4}\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{9\cdot 90}{2} = 405^\circ$ $\qquad c)\ (\frac{\pi}{6})^R = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{60}{2} = 30^\circ$

$d)\ (-\frac{\pi}{6})^R = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 360^\circ}{20} = -30^\circ$ $\qquad e)\ (-\frac{\pi}{10})^R = \frac{\frac{2\pi}{10}\cdot 360}{2\pi} = -18^\circ$

$f)\ (\frac{2\pi}{5})^R = \frac{\frac{2\pi}{5}\cdot 360}{2\pi} = 72^\circ$ $\qquad g)\ (-\frac{5\pi}{12})^R = \frac{-5^\pi/12\cdot 360}{2\pi} = -75^\circ$

8- اگر طول ثانیه گرد یک ساعت 6cm باشد در 40 ثانیه، ثانیه گرد چند سانتی متر فاصله را طی می کند؟

حل:

$S = R.\theta \qquad 40'' = \frac{40}{60}\mathrm{Re}v = \frac{2}{3}\mathrm{Re}v$

$S = 6cm\cdot(\frac{4}{3}\pi)^R = 8\pi cm \qquad \begin{cases} 1\mathrm{Re}v = 2\pi^R = \\ \frac{2}{3}\mathrm{Re}v = (\frac{4}{3}\pi)^R \end{cases}$

9- اگر شعاع دایره 3cm و زاویهٔ مرکزی $\frac{5}{3}$ رادیان باشد طول قوس مقابل این زاویهٔ مرکزی چند سانتی است؟

حل: $S = R\cdot\theta = 3cm\cdot\frac{5}{3} = 5cm$

10- اگر گردش ثانیه گرد یک ساعت 35 ثانیه باشد، ثانیه گرد چند رادیان زاویهٔ مثبت را طی می کند؟

حل: $60'' = (2\pi)^R \Rightarrow (\frac{35}{60})\cdot 2\pi = (\frac{7\pi}{6})^R$

11- مجموع دو زاویه 152° است. اگر اندازهٔ یکی از آنها برحسب درجه برابر اندازهٔ دیگری برحسب گراد باشد، اندازهٔ هر زاویه را برحسب رادیان دریابید.

حل:

$x + y = 152^\circ \quad \{x = \frac{10}{9}y$

$\frac{10}{9}y + y = 152 \Rightarrow 10y + 9y = 1368 \Rightarrow y = \frac{1368}{19}$

$y = 72^\circ \qquad x = 80^\circ \qquad 72^\circ = 80^g$

$\Rightarrow x = 80\cdot\frac{\pi}{180} = (\frac{4\pi}{9})^R$

$y = 72\cdot\frac{\pi}{180} = (\frac{8\pi}{20})^R = (\frac{2\pi}{5})^R$

12- 1620° چند رادیان می شود؟

$a)\ 4\pi^R \qquad b)\ 8\pi^R \qquad c)\ 9\pi^R \qquad d)\ 10\pi^R$

حل:

$$1620^\circ = \frac{1620 \cdot 2\pi}{360} = (9\pi)^R$$

13- چهار دوران چند رادیان می شود؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

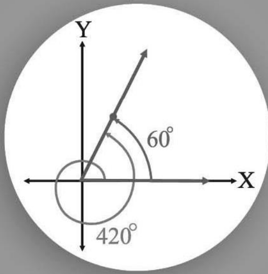
حل: چهار دوران: $4 \cdot 2\pi^R = 8\pi^R$, (جواب درست d میباشد)

14- اگر شعاع یک دایره $10m$ باشد طول قوس مقابل زاویه مرکزی $45 radian$ چند متر می شود؟

حل:

$r = 10m$

$\theta = 45 \ \ radian, \quad S = r\theta \Rightarrow \quad S = 45^R \cdot 10m = 450m$



حالت معیاری یک زاویه وزوایای کوترمینل

صفحهٔ کتاب: (159) **وقت تدریس:** (1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان باید در اخیر این درس:
• تعریف حالت معیاری یک زاویه و زوایای کوترمینل را بدانند.
• طرق یافتن زوایای کوترمینل با یک زاویه را بیاموزند.
• یک زاویه را در حالت معیاری نشان داده بتوانند.
• زوایای کوترمینل با یک زاویه را دریافت کرده بتوانند.
• زاوایای کوترمینل را در شکل رسم کرده بتوانند.
• در حل مسایل مثلثاتی بالخصوص در دریافت نسبت های مثلثاتی یک زاویه اهمیت زوایای کوترمینل را درک کنند و به آموزش آن علاقمند گردند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کار های انفرادی، گروپی، مباحثه و ...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت و ...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود.
و برای شان توضیح گردد چون اضلاع دومی زوایایی 60° و 420° باهم منطبق اند پس این دو زاویه باهم کوترمینل می باشند؛ زیرا که: $420=1\times360+60$</td></tr>
</table>

فعالیت جریان درس (28) دقیقه:

استاد محترم حالت معیاری یک زاویه را درچارت اشکال صفحه (159) ویا به روی تخته توضیح نماید ومثال اول این صفحه را با سهم گیری شاگردان حل نماید، بعد فعالیت صفحه (160) را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند و نماینده گروپ کار خود را روی تخته توضیح کند.

بعد از تعریف زوایای کوترمینل مثال دوم وسوم را یا از روی چارت و یا روی تخته توسط شکل حل وتوضیح کنید وفعالیت صفحه (161) را میتوانید که از دو شاگرد بپرسید؛ همچنین مثال های چهارم وپنجم را در شکل با سهم گیری شاگردان کار کنید.

تحکیم درس (7) دقیقه

کوچکترین زاویه مثبت را معلوم کنید که با زوایایی $-40^\circ, -125^\circ$ و 450° کوترمینل باشد.

جواب:($320^\circ, 235^\circ$ و 90°)

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

غرض ارزیابی قسمتی از سؤال دوم از شاگردان پرسیده شوند.

معلومات اضافی برای معلم

- زوایایی کوترمنیل با زاویه های داده شده از (0) الی (2π) قرار زیر می باشد:

$-\frac{\pi}{3}\to\frac{5\pi}{3}$ $\quad \frac{19\pi}{4}\to\frac{3\pi}{4}$ $\quad -\frac{7\pi}{5}\to\frac{3\pi}{5}$ $\quad 7\to 7-2\pi$

- در حالت معیاری برای هر کدام از زوایایی $\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}$ که بر حسب رادیان داده دشده اند، چهار چهار زاویه کوترمنیل قرار زیر می باشند :

$\frac{\pi}{4}\to \quad \frac{9\pi}{4},\frac{17\pi}{4},\frac{7\pi}{4},-\frac{15\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{6}\to \quad \frac{11\pi}{6},\frac{23\pi}{6},\frac{-13\pi}{6},-\frac{25\pi}{4}$

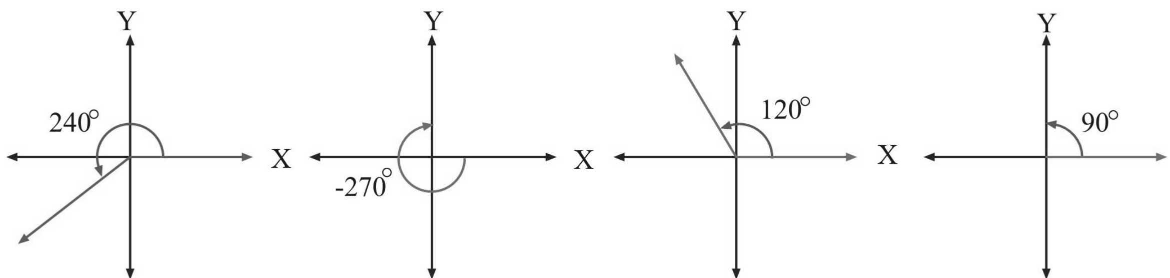
برای زوایای داده شده تمام زوایای کوترمنیل در صورتی که $-360^\circ<\theta<360^\circ$ باشد عبارت اند از:

$35^\circ\longrightarrow -325^\circ$	$23^\circ\longrightarrow -337^\circ$	$112^\circ\longrightarrow -248^\circ$
$160^\circ\longrightarrow -200^\circ$	$612^\circ\longrightarrow 252^\circ,-108^\circ$	$-315^\circ\longrightarrow 45^\circ$
$478^\circ\longrightarrow 118^\circ,-242^\circ$	$-135^\circ\longrightarrow 225^\circ$	$-120^\circ\longrightarrow 240^\circ$
$90^\circ\longrightarrow -270^\circ$	$-180^\circ\longrightarrow 180^\circ$	$-450^\circ\longrightarrow -90^\circ,270^\circ$
$-280^\circ\longrightarrow 80^\circ$	$-485^\circ\longrightarrow -125^\circ,235^\circ$	$225^\circ\longrightarrow -135^\circ$
$540^\circ\longrightarrow 180^\circ,-180^\circ$	$270^\circ\longrightarrow -90^\circ$	$560^\circ\longrightarrow 200^\circ,-160^\circ$
$195^\circ\longrightarrow -165^\circ$	$410^\circ\longrightarrow 50^\circ,-310^\circ$	

جواب تمرین

1- زوایای $-270^o,120^o,90^o$ و 240^o را در حالت معیاری رسم کنید.

حل:



2- کوچکترین زاویهٔ مثبتی که با زاوایای زیر کوترمینل باشند دریابید.

$-40^\circ,-125^\circ,450^\circ,539^\circ,60^\circ,90^\circ,135^\circ$

حل: کوچکترین زاویهٔ مثبت که با 135° کوترمینل باشد 495° میباشد.

کوچکترین زاویهٔ مثبت که با زاویهٔ 90° کوترمینل باشد 450° میباشد.

کوچکترین زاویهٔ مثبت که با زاویهٔ 60° کوترمینل باشد 420° میباشد.

کوچکترین زاویهٔ مثبت که با زاویهٔ 539° کوترمینل باشد 179° میباشد.

کوچکترین زاویهٔ مثبت که با زاویهٔ 450° کوترمینل باشد 90° میباشد.

کوچکترین زاویهٔ مثبت که با زاویهٔ -125° کوترمینل باشد 235° میباشد.

کوچکترین زاویهٔ مثبت که با زاویهٔ -40° کوترمینل باشد 320° میباشد.

3- آیا زوایای $(-80^\circ, 280^\circ)$ و $(35^\circ, 395^\circ)$ با هم کوترمینل میباشد؟

حل: چون $-80+360=280$ می باشد؛ پس با هم کوترمینل میباشد و همچنان، $35+360=395^\circ$ میباشد؛ پس این دو زاویه نیز باهم کوترمینل میباشند.

4- شش زاویهٔ کوترمینل را با زاویه 40° دریابید.

حل: شش زاویهٔ کوترمینل با زاویهٔ 40° عبارت اند از:

$40^\circ + 2\cdot 360^\circ = 40^\circ + 720^\circ = 760^\circ$ | $40^\circ + 360^\circ = 400^\circ$

$40^\circ - 360^\circ = -320^\circ$ | $40^\circ + 3\cdot 360^\circ = 40^\circ + 1080^\circ = 1120^\circ$

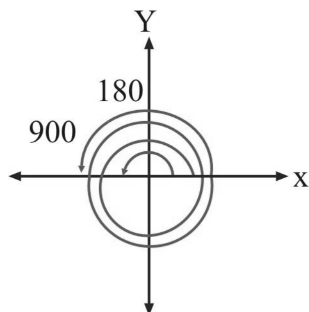
$40^\circ - 1080^\circ = -1040^\circ$ | $40^\circ - 720^\circ = -680^\circ$

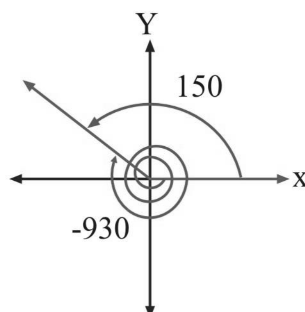
5- آیا زوایا $(150^\circ, -930^\circ)$ و $(180^\circ, 900^\circ)$ با هم کوترمینل اند؟ در شکل نیز نشان دهید.

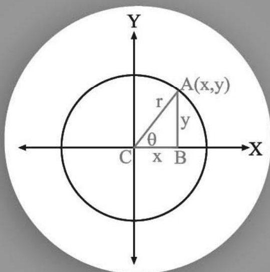
چون: $-930^\circ = 150^\circ - 2.360^\circ = 150^\circ - 1080^\circ$ پس باهم کوترمینل اند.

$900^\circ = 180^\circ + 2.360^\circ = 180^\circ + 720^\circ$

پس باهم کوترمینل اند.







توابع مثلثاتی

صفحۀ کتاب: (163)   وقت تدریس (2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخیر این درس: • تعریف توابع مثلثاتی یک زاویۀ حاده را در مثلث قایم الزاویه بدانند. • بعضی از رابطه های اساسی بین نسبت های مثلثاتی زوایا را بیاموزند. • علامت های نسبت های مثلثاتی یک زاویه را در هرچهار ربع بشناسند. • در صورتیکه کمیات وضعیه یک نقطه ضلع دوم یک زاویه در حالت معیاری معلوم باشد، نسبت های مثلثاتی آن زاویه را دریافت کرده بتوانند. • درک کنند که در توابع مثلثاتی متحول مستقل زاویه θ ومتحول مقید نسبت های مثلثاتی مربوط زاویه می باشند. • در حل مسایل مثلثاتی اهمیت علامت های نسبت های مثلثاتی وارتباط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای انفرادی ، گروپی، مباحثه و...
مواد درسی ومواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود واز روی چارت در شکل توضیح گردد که نسبت های مثلثاتی به طول اضلاع θ ارتباط ندارد ومحض به وسعت زاویه θ ارتباط دارد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

در چارت یا روی تخته نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده (θ)دریک مثلث قایم الزاویه تعریف شود و با سهم گیری شاگردان مثال اول صفحه (163) حل گردد. بعد از ثبوت بعضی رابطه های مثلثاتی فعالیت صفحه (165) را شاگردان در گروپ ها کار کنند و به دیگران توضیح کنند در دایره مثلثاتی (Trigonometric circle) توابع مثلثاتی به حیث خطوط مثلثاتی نشان داده شوند. و نیز نشان داده شود که شش توابع مثلثاتی، $F(\theta)=\sin\theta, F(\theta)=\cos\theta$ ، $F(\theta)=\tan\theta, F(\theta)=\cot\theta, F(\theta)=\sec,$ و $F(\theta)=\csc\theta$ توابع از مقدار θ می باشد. بعد از آن که شاگردان علامت های نسبت های مثلثاتی در هرچهار ربع را بشناسند، مثال دوم را باسهم گیری شاگردان درشکل حل وتوضیح کنید.

تحکیم درس (7) دقیقه

علامت های نسبت های مثلثاتی زوایای زیرا شفاهی بگویید.

$\text{Sin}\,91^\circ$ $\text{Sin}\,181^\circ$ $\cos 271^\circ$ $\tan 300^\circ$ $\cot 269^\circ$ $\csc 120^\circ$ $\csc 45^\circ$ $\sec 269^\circ$

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

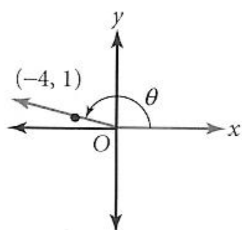
- اگر در حالت معیاری ضلع دوم زاویه θ از نقطه $(4،3)$ بگذرد تمام نسبت های مثلثاتی زاویه θ را در یابید.
- اگر در حالت معیاری ضلع دوم زاویه θ از نقطه $(-2،-3)$ بگذرد نسبت های مثلثاتی θ را دریابید.

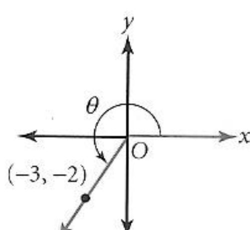
معلومات اضافی برای معلم

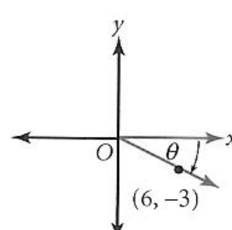
- موقعیت بعضی زوایا در یکی از چهار ربع و علامت های نسبت های مثلثاتی آن قرار ذیل میباشند.

شماره	زاویه	ربع	علامت
1	$\sin 160^\circ$	2	+
2	$\cos 160^\circ$	2	−
3	$\tan 200^\circ$	3	+
4	$\sin 262^\circ$	3	−
5	$\sin(-40^\circ)$	4	−
6	$\cot(-130^\circ)$	3	+
7	$\sin 210^\circ$	3	−
8	$\tan 210^\circ$	3	+
9	$\cos 470^\circ$	2	−
10	$\sin 470^\circ$	2	+
11	$\sin(-470^\circ)$	3	−
12	$\tan(-470^\circ)$	3	+
13	$\sin 1030^\circ)$	4	−
14	$\cos 1000^\circ$	4	+

- نسبت های مثلثاتی زاویه θ که در اشکال زیر داده شده است عبارت اند از:







$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ $\cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\tan\theta = -\frac{1}{4}$

$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\tan\theta = -\frac{2}{3}$

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

- بعضی از مطابقت های مثلثاتی طور ذیل میباشند:

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \tan\theta \qquad \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1 \qquad (1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = \frac{1}{\sec^2\theta}$$

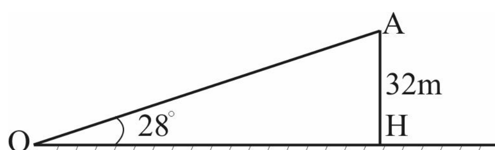
$$(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta \qquad (1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta) = 1$$

$$(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1 \qquad \sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$$

$$\cos x(\tan x + \cot x) = \csc^2 x \qquad \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\tan^2 x\cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

مسئله اول:



ارتفاع منار $32m$ و زاویه $A\hat{O}H = 28^\circ$

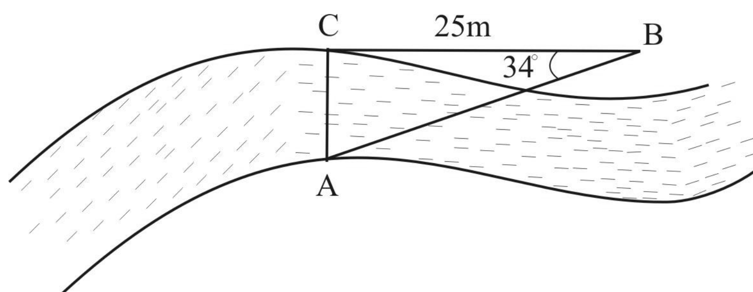
فاصله نقطه O که O روی زمین است از پایه منار عبارت است از:

$$\cot 28^\circ = \frac{OH}{AH}$$

$$OH = AH\cot 28^\circ = 32\cdot(1.8807) = 60.1824m$$

مسئله دوم:

برای دریافت AC عرض دریا که در شکل مشاهده می شود، عمودی از نقطه B بالای AC رسم نموده که طول آن $BC = 25m$ است اگر $C\hat{B}A = 34^\circ$ باشد.



$$\tan 34^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC\cdot\tan 34^\circ = 25m\cdot(0.6745)$$

$$AC = 16.8625m$$

جواب به سؤال های تمرین

1– علامه های نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را شفاهی بگویید:

$\sin 120^o \quad \tan 170^o \quad \tan 60^o \quad \cos 330^o \quad \sec 200^o$

$\cot 271^o \quad \csc 91^o \quad \sin 271^o \quad \csc 181^\circ \quad \csc 315^\circ$

حل:

منفی	$\cot 271^\circ$	مثبت	$\sin 120^\circ$
مثبت	$\csc 91^\circ$	منفی	$\tan 170^\circ$
منفی	$\sin 271^\circ$	مثبت	$\tan 60^\circ$
منفی	$\csc 181^\circ$	مثبت	$\cos 330^\circ$
منفی	$\csc 315$	منفی	$\sec 200$

2- اگر θ در حالت معیاری به حسب رادیان باشد و ضلع دوم θ از نقاط داده شدهٔ زیر بگذرد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را دریابید.

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

حل:

$a) \quad (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2$$

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=r^2 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$b) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $x^2+y^2=r^2$

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2 \Rightarrow r=1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

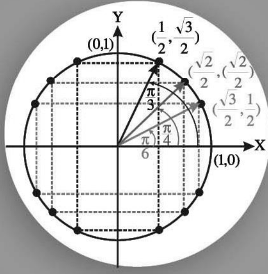
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{\frac{2}{2}}}=-1$$

c) $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow r=1$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\theta = -1$ و $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow r=1$

d) $\sin\theta = -\frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\tan\theta = 1$



نسبت های مثلثاتی بعضی زوایای خاص

صفحهٔ کتاب (169)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>

اهداف آموزشی

- دانشی

- مهارتی

- ذهنیتی

</td><td>

- در اخیر این درس شاگردان باید:
- طریق دریافت نسبت های مثلثاتی زوایای $30^\circ, 45^\circ$ و 60° را بیاموزند.
- نسبت های مثلثاتی زوایای $30^\circ, 45^\circ$ و 60° را دریافت کرده بتوانند.
- ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایای 30°و 60° را بفهمند.
- در هر مثلث متساوی الاضلاع نسبت های زوایای 30° و 60° را دریافت کرده بتوانند.
- ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایایی که مجموعه شان 90° می شود را درک کنند، و از روی یک زاویه، نسبت های زاویه دیگری را دریافت کرده بتوانند و اهمیت این ارتباطات را در حل مسایل مثلثاتی و در ترتیب جدول نسبت های مثلثاتی زاویا درک کنند.

</td></tr>
<tr><td>

روش های تدریس

</td><td>سؤال و جواب، کار های گروپی، انفرادی، مباحثه و...</td></tr>
<tr><td>

مواد درسی و مواد ممد درسی

</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت و ...</td></tr>
<tr><td>

توضیح ورودی (5) دقیقه

</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی با استفاده از چارت شکل ورودی، در شکل کمیات وضیعه انجام هـای اضلاع دوم زوایـای $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ نشان داده شود و چون $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ می شود پس $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم، از روی چارت و یا روی تخته در شکل مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین نسبت های مثلثاتی زاویه 45° ویا $\frac{\pi}{4}$ را دیان را دریابد بعد شاگردان در گروپ ها فعالیت صفحه(170) را اجرا کنند و نماینده یک گروپ کار خود را به دیگران توضیح کند البته معلم محترم نظارت، رهنمای و همکاری می نماید.

بعد مطابق شکل در یک مثلث متساوی الاضلاع نسبت های مثلثاتی زوایای 30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان و 60° یا $\frac{\pi}{3}$ رادیان را به دست آورید. فعالیت دوم صفحه (170°) را شاگردان طبق فعالیت اولی اجرا کنند. و استاد محترم در یک مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین ارتباط بین نسبت های مثلثاتی دوزاویه که مجموعه شان 90° می شود را واضح سازند. بعد از این که شاگردان فعالیت صفحه(172) را اجرا کنند، استاد محترم مثال این صفحه را با سهم گیری شاگردان حل کند.

</td></tr>
</table>

تحکیم درس (7) دقیقه

$\sin 19^\circ 20' = 0.3311$

$\cos 19^\circ 20' = 0.9436$

$\tan 19^\circ 20' = 0.3508$

$\sin 70^\circ 40'$, $\cos 70^\circ 40'$ و $\cot 70^\circ 40'$ را دریابید

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

کدام یک از مساوات زیر درست اند؟

$\sin 1^\circ 40'\ 10'' = \cos 88^\circ 10'\ 50''$

$\tan 11^\circ 11'\ 11'' = \cot 79^\circ 49'\ 49''$

$\sec 20^\circ 21'\ 22'' = \csc 69^\circ 40'\ 39''$

$\cot 40' 40'\ 40'' = \tan 49^\circ 19'\ 20''$

معلومات اضافی برای معلم

-1

θ	$30^\circ = (\frac{\pi}{3})^R$ ↗ $45^\circ = (\frac{\pi}{4})^R$ ↗ $60^\circ = (\frac{\pi}{3})^R$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$ ↗ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘ $\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗ 1 ↗ $\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$ ↘ 1 ↘ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

-2

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1°	0.0175	0.9998
0.1°	0.00175	0.999998
0.01°	0.000175	0.99999998
0.001°	0.0000175	0.9999999998

جواب به سؤال های تمرین

1- اگر:

$\sin 17^\circ = 0{,}2927 \quad \cos 17^\circ = 0{,}9563 \quad \sec 17^\circ = 1{,}046 \quad \csc 17^\circ = 3{,}420$

$\cot 17^\circ = 3{,}271$ و $\tan 17^\circ = 0{,}3057$ باشند، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 73° را دریابید.

حل:

$Sin\ 17^\circ = 0.2927 \Rightarrow \cos 73^\circ = 0.2927$

$\cos 17^\circ = 0.9563 \Rightarrow \sin 73^\circ = 0.9563$

$tg\,17^\circ = 0.3057 \Rightarrow \cot 73^\circ = 0.3057$

$\cot g\,17^\circ = 3.271 \Rightarrow \tan 73^\circ = 3.271$

$\sec 17^\circ = 1.046 \Rightarrow \csc 73^\circ = 1.046,\ \csc 17^\circ = 3.420 \Rightarrow \sec 73^\circ = 3.420$

2 – کدام یک از مساوات های زیر درست نیست؟

$\sin 28^\circ = \cos 62^\circ \qquad \cos 12^\circ\ 10'\ 20'' = \sin 77^\circ\ 49'\ 40''$

$\sec 12^\circ = \sec 88^\circ \qquad \tan 70^\circ = \cot\ 20^\circ$

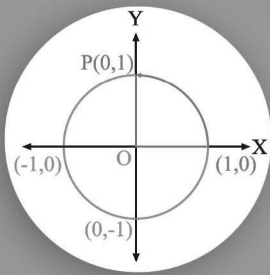
حل:

$\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$ درست است.

$\cos 12^\circ\ 10'\ 20'' = \sin 77^\circ\ 49'\ 40''$ درست است.

$\sec 12^\circ = \sec 88^\circ$ درست نیست.

$\tan 70^\circ = \cot 20^\circ$ درست است.



نسبت های مثلثاتی زوایای

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360°

صفحهٔ کتاب (173)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن نسبت های مثلثاتی زوایای $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360° را بیاموزند. • بفهمند که دو، دو نسبت مثلثاتی این زوایا تعریف نگردیده اند. • نسبت های این زوایا را دریافت کرده بتوانند. • درک کنند که نسبت های مثلثاتی زوایای 360°و 0°با هم مساوی می باشند. • در حل مسایل مثلثاتی از نسبت های این زوایا استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن ها را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی ، گروپی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	از روی چارت ورودی در شکل نشان داده شود که نقطه $p(0,1)$ به روی دایره مثلثاتی بالای ضلع دوم زاویه 90° و نقطه $p(-1,0)$ بالای ضلع دوم زاویه 180° و نقطه $(0,-1)$ بالای ضلع دوم زاویه 270° و نقطه $(1,0)$ بالای ضلع اول و دوم زاویه 360° واقع اند.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم، در چارت از روی شکل نسبت های مثلثاتی 90° را با سهم گیری شاگردان بیابد.
شاگردان فعالیت صفحه(173) را اجرا کنند.
همچنین از روی شکل نسبت های مثلثاتی 180° را به دست آورید و فعالیت صفحه(174) را شاگردان کار کنند. به همین ترتیب نسبت های مثلثاتی زوایای $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ و $360^\circ = 2\pi$ را به دست آورید.
و فعالیت صفحه(175) را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند و نمایندهٔ گروپ کار خود را به دیگران توضیح نماید و استاد محترم رهنمای و همکاری نماید.

تحکیم درس (7) دقیقه

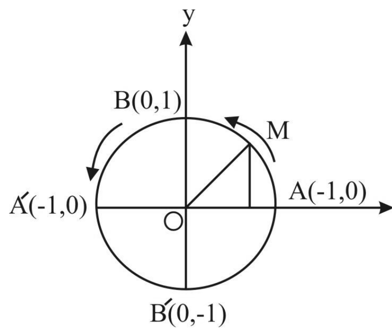
توضیح کنید که چرا دو، دو نسبت مثلثاتی این زوایا تعریف نشده اند؟

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس حل گردد (جدول خانه پری شود.)

معلومات اضافی برای معلم

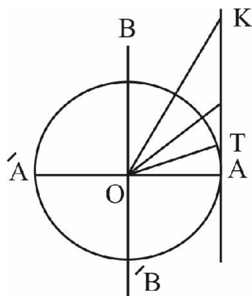
a) تغیرات توابع مثلثاتی $\sin\propto$ و $\cos\propto$:



موقعیت نقطه M	A B A′ B′ A
اندازه قوس $\overset{\frown}{AM}$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\sin\alpha$	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$
$\cos\alpha$	$1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1$

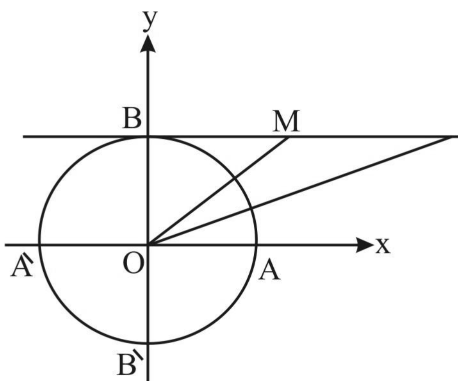
b) تغیرات $\tan\propto$

موقعیت نقطه M	A	B	A'	B'	A
اندازه قوس $\overset{\frown}{AM}$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}-\varepsilon$		$\frac{\pi}{2}+\varepsilon \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2}-\varepsilon$		$\frac{3\pi}{2}+\varepsilon \nearrow 2\pi$
$\tan\alpha$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$



c) تغیرات $\cot\propto$:

موقعیت نقطه M	A	B	A'	B'	A
اندازه قوس $\overset{\frown}{AM}$		$+\varepsilon \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi-\varepsilon$		$\pi+\varepsilon \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi-\varepsilon$	
$\cot\alpha$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$	



جواب به سؤال های تمرین

1- جدول زیر را پر کنید:

θ	0^{o}	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

حل:

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0

2- $\tan 270^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف نشده

حل: $\tan 270^{\circ}$ تعریف نشده است (جواب درست d میباشد).

3- $\cos 90^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف نشده

حل: $\cos 90^{\circ}$ ، صفر میباشد (جواب درست c میباشد).

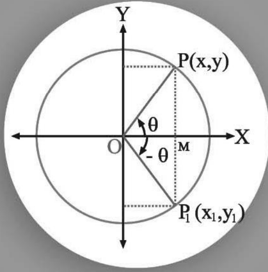
4- آیا $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2}$ است ؟چرا؟

حل: بلی باهم مساوی اند.

$$\left.\begin{array}{l} (\frac{3\pi}{2})^{R} = 270^{\circ} \\ (\frac{9\pi}{2})^{R} = 810^{\circ} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cos 270^{\circ} = 0 \\ \cos 810^{\circ} = 0 \end{array}$$

زیرا نقطهٔ (0.1) بالای ضلع دوم زاویه $\frac{9\pi}{2}$ و نقطهٔ $(0.-1)$ بالای ضلع دوم زاویه $\frac{3\pi}{2}$ قرار دارد در نتیجه:

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2} = 0$$



ارتباط بین نسبت های مثلثاتی
یک زاویه حاده با نسبت های مثلثاتی زوایای دیگر

صفحهٔ کتاب: (177)   وقت تدریس: (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان در اخیر این درس باید:
- دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• طریق دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه منفی را بدانند. • از روی نسبت های مثلثاتی یک زاویه مثبت، با عین مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه منفی را در یافت کرده بتوانند. • ارتباط نسبت های مثلثاتی θ و $-\theta$ را درک کنند. • در حل مسایل مثلثاتی اهمیت ارتباط نسبت های مثلثاتی θ و $-\theta$ را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار های انفرادی و گروپی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب، تخته ، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	این موضوع که از جدول مثلثاتی محض نسبت های مثلثاتی زوایای مثبت حاده را به دست آورده می توانیم به شاگردان توضیح گردد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

در صورت که چارت شکل ورودی موجود باشد استاد محترم در قدم اول مساوی بودن دو مثلث OMP و OMP_1 را واضح سازد، بعد ارتباط بین نسبت های زوایای θ و $-\theta$ را ثبوت کند.

استاد محترم مثال اول صفحه (177) این درس را با سهم گیری شاگردان حل کند فعالیت او ل این درس را شاگردان در گروپ ها حل کنند و نمایندهٔ یک گروپ کار خود را روی تخته به شاگردان توضیح کند.

استاد محترم مثال دوم صفحه (178) را با سهم گیری شاگردان حل کند و شاگردان فعالیت دوم این صفحه را در گروپ ها اجرا نموده توضیح نمایند.

تحکیم درس (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال اول تمرین این درس حل شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

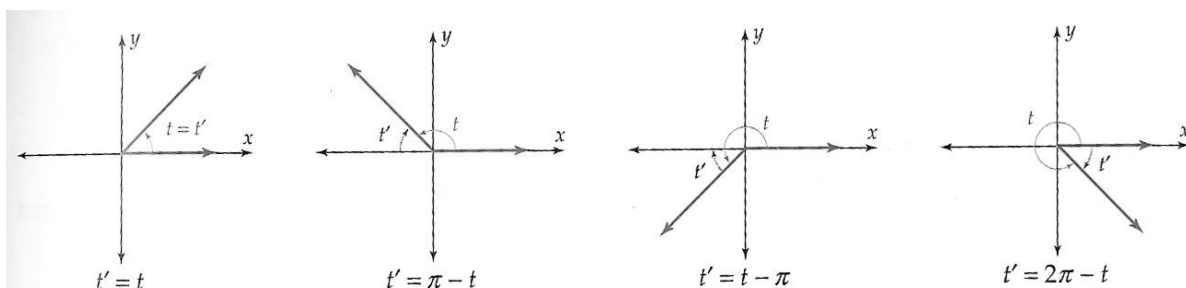
غرض ارزیابی درس سؤال دوم تمرین این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

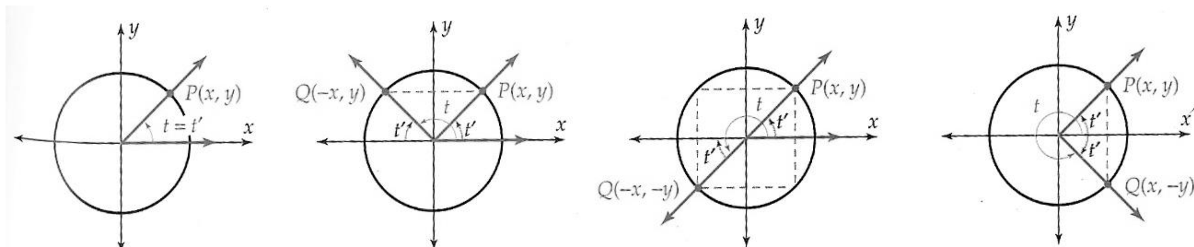
• زاویه ماخذ یا زاویه مربوطه (Reference angle or Related angle)

برای زاویه t در حالت معیاری زاویه مربوطه عبارت از زاویه یی مثبت حاده می باشد که ضلع دوم زاویه t با محور x می سازد به اشکال زیر توجه کنید. که t' زاویه مربوطه زاویه t رادیان که در حالت معیاری می باشد به دو طریق

نشان داده شده است.



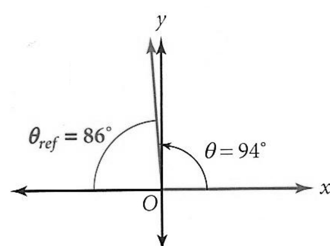
دایره مثلثاتی با زاویه مربوطه در ربع اول:

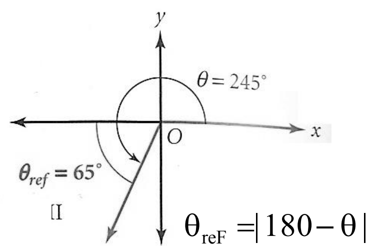


در هر صورت توسط انطباق پذیری مثلث ها ثبوت می شود که:

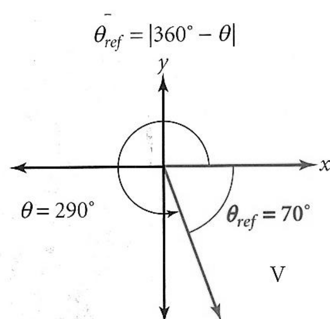
مختصهٔ x نقطه $Q = \pm$ مختصهٔ x نقطه p مختصهٔ y نقطه $Q = \pm$ مختصهٔ y نقطه p

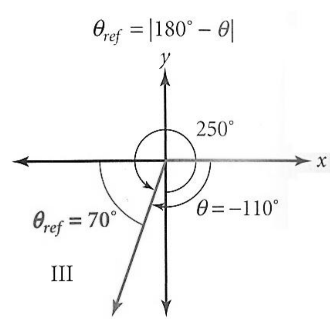
مثال: θ_{ref} برای زوایایی $I:\theta = 94^\circ$, $II:\theta = 245^\circ$, $III:\theta = 290^\circ$ و $IV:\theta = -110^\circ$ طور ذیل میباشد.





$\theta_{ref} = |180^\circ - 94^\circ| = 86^\circ$ $\theta_{ref} = |180^\circ - 245^\circ| = 65^\circ$





$Q_{ref} = |360^\circ - \theta| = |360 - 290^\circ| = 70^\circ$ $\theta_{reF} = \left|180^\circ - 250^\circ\right| = 70^\circ$

در ربع سوم می باشد. $\theta = -110^\circ$

زاویه مثبت کوترمینل برای زاویهٔ -110° عبارت از 250° می باشد.

همچنین

$\theta = 212^\circ \to \theta_{reF} = 32^\circ$ $\theta = 47^\circ \to \theta_{reF} = 47^\circ$ $\theta = -340^\circ \to \theta_{reF} = 20^\circ$

$\theta = 512^\circ \to \theta_{reF} = 28^\circ$ $\theta = 40^\circ \to \theta_{reF} = 40^\circ$ $\theta = 1112^\circ \to \theta_{reF} = 32^\circ$

$\theta = 124^\circ \to \theta_{reF} = 56^\circ$ $\theta = 105^\circ \to \theta_{reF} = 75^\circ$ $\theta = 270^\circ \to \theta_{reF} = 90$

$\theta = -135^\circ \to \theta_{reF} = 45^\circ$ $\theta = 1028^\circ \to \theta_{reF} = 52^\circ$ $\theta = 108^\circ \to \theta_{reF} = 72^\circ$

$\theta = 973^\circ \to \theta_{reF} = 73^\circ$ $\theta = 440^\circ \to \theta_{reF} = 80^\circ$ $\theta = -225^\circ \to \theta_{reF} = 45^\circ$

$\theta = 150^\circ \to \theta_{reF} = 30^\circ$

خلص بعضی از مطابقت های اساسی مثلثاتی

1- مطابقت های خارج قسمت (Quotient Identities)

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

2....... (Reciprocal Identities)

$$\sin t = \frac{1}{\csc t} \qquad \cos t = \frac{1}{\sec t} \qquad \tan t = \frac{1}{\cot t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

3- مطابقت های فیثاغورثی (Pythagoream Identities)

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

4- مطابقت های پریودیک (Periodicity Identities)

$$\sin(t \pm 2\pi) = \sin t \qquad \cos(t \pm 2\pi) = \cos t \qquad \tan(t \pm \pi) = \tan t$$

5- مطابقت های زوایایی منفی (Negative Angle Identities)

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

6- ....(Identities Involving $\pi - b$)

$$\sin t = \sin(\pi - t) \qquad \cos t = -\cos(\pi - t) \qquad \tan t = -\tan(\pi - t)$$

جواب به سؤال های تمرین

1- نسبت های مثلثاتی -360^o یا -2π رادیان را دریابید.

حل: نسبت های مثلثاتی زاویه -360°:

$\sin(-360^\circ) = -\sin 360^\circ = 0$

$\cos(-360^\circ) = \cos(360^\circ) = 1$

$\tan(-360^\circ) = -\tan 360^\circ = 0$

$\cot(-360^\circ) = -\cot(360^\circ)$ (تعریف نشده)

$\sec(-360^\circ) = \sec(360^\circ) = 1$

$\csc(-360) = -\csc(360^\circ) = \frac{1}{0}$ (تعریف نشده)

2- نسبت های مثلثاتی -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ رادیان و -30° و -60° را دریابید.

حل:

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cot(-45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\sec(-45^\circ) = \frac{1}{\cos(-45^\circ)} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\csc(-45^\circ) = \frac{1}{\sin(-45^\circ)} = \frac{1}{-\sin 45^\circ} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \qquad \cos(-30^\circ) = \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = -\frac{1}{\cos(-30^\circ)} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(-30^\circ) = \frac{1}{\sin(-30^\circ)} = \frac{1}{-\sin 30^\circ} = -2$$

$$\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot(-60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(-60^\circ) = \frac{1}{\cos(-60^\circ)} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\csc(-60^\circ) = \frac{1}{\sin(-60^\circ)} = \frac{1}{-\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

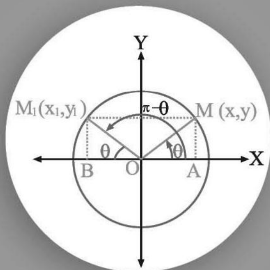
3- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ -90° یا $-\frac{\pi}{2}$ رادیان را دریابید.

$\sin(-90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1 \qquad \sec(-90^\circ) = \frac{1}{\cos 90^\circ}$ (تعریف نشده).

$$\cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \qquad \csc(-90^\circ)\frac{1}{-\sin 90^\circ} = -1$$

$\tan(-90^\circ) = -\tan 90^\circ$ تعریف نشده.

$$\cot(-90^\circ) = -\cot 90^\circ = 0$$



ارتباط بین نسبت های مثلثاتی دو زاویه که مجموعه و یا فرق آن ها π یا 180° باشد

صفحۀ کتاب (179)　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زاویۀ حاده θ و $(180^\circ-\theta)$ را بدانند. • ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زاویۀ حاده θ و زاویه $(180^\circ+\theta)$ را بدانند. • از روی نسبت های مثلثاتی زاویه حاده θ نسبت های مثلثاتی زوایایی $(180^\circ-\theta)$ و $(180^\circ+\theta)$ را به دست آورده بتوانند. • بدانند که چون ضلع دوم زاویه $(180^\circ-\theta)$ در ربع دوم قرار دارد $\sin(180^\circ-\theta)$ و $\csc(180^\circ-\theta)$ مثبت می باشند، و دیگر نسبت های مثلثاتی این زاویه منفی می باشند. • بدانند که چون ضلع زاویۀ $(180^\circ+\theta)$ در ربع سوم قرار دارند پس $\tan(180^\circ+\theta)$ و $\cot(180^\circ+\theta)$ مثبت و دیگر نسبت های مثلثاتی این زاوایا منفی می باشند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت ارتباط نسبت های مثلثاتی این زوایا را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار های گروپی، انفرادی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	$\sin150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$ $\cos150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(135^\circ)=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin45=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos(135^\circ)=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ واضح است که: $\sin135^\circ=\sin45^\circ$ $\sin130^\circ=\sin(180^\circ-50^\circ)=\sin50^\circ$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

در صورت که چارت شکل ورودی موجود باشد. استاد محترم واضح سازد که اگر مجوع دوزایه 180° باشد و یک زاویه حاده θ باشد زاویه دیگری $180-\theta$ می باشد؛ زیرا که $180^\circ = \theta + (180^\circ - \theta)$ می شود.

استاد محترم، مساوی بودن دو مثلث $\overset{\Delta}{OAM}$ و $\overset{\Delta}{OM_1B}$ را ثبوت نماید. و بعد ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایای θ و $180^\circ - \theta$ را واضح سازد.

شاگردان سه نسبت های متباقی زاویه $(\pi-\theta)$ یا $(180^\circ-\theta)$ را در گروپ ها به دست آورند.

استاد محترم، غرض یافتن ارتباط نسبت های مثلثاتی زوایای θ و $(180^\circ+\theta)$، مساوی بودن دو مثلث $\overset{\Delta}{OAM}$ و $\overset{\Delta}{OBM_1}$ را به شاگردان واضح کند. و بعد از به دست آوردن ارتباط بین نسبتهای مثلثاتی این زوایا، مثال اول صفحه (180) را با سهم گیری شاگردان حل کند.

شاگردان فعالیت صفحه (181) را حل کنندو استاد محترم مثال دوم این صفحه را از روی شکل توضیح کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحیکم درس سؤال اول تمرین این درس کار شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال سوم تمرین این درس از شاگردان پرسیده شود.

جواب به سؤال های تمرین

1- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 225° را دریابید.

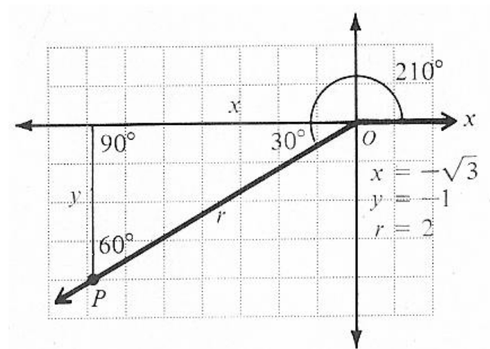
$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$
$$\cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$
$$\sec 225^\circ = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$
$$\csc 225^\circ = \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

2- نسبت های مثلثاتی 210° را دریابید.

$$\sin(210^\circ) = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(210^\circ) = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cot(210^\circ) = \cot(180^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec(210^\circ) = \sec(180^\circ + 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(210^\circ) = \csc(180^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$



3- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 150° را دریابید.

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = -\sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\csc 150^\circ = \csc(180^\circ - 30^\circ) = \csc 30^\circ = 2$$

-4

$$\cot\frac{3\pi}{4} = ?$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

حل:

$$\cot\frac{3\pi}{4} = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

جواب d درست است.

-5

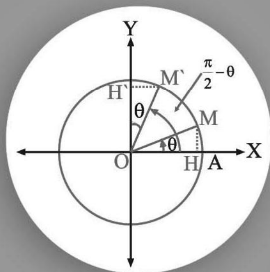
$$\sec(225^\circ) = ?$$

$a)\ \frac{2}{\sqrt{2}}$ $b)\ -\frac{2}{\sqrt{2}}$ $c)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ $d)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل:

$$\sec(225^\circ) = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

جواب b درست است.



نسبت های مثلثاتی دو زاویه یی که مجموعه یا فرق آن ها (90°) یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد

صفحهٔ کتاب: (183)   وقت تدریس: (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن نسبت های مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ از جنس θ را بیاموزند. • ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایایی که مجموعه یا فرق شان 90° می شود بدانند و نسبت های مثلثاتی یکی را از جنس نسبت های مثلثاتی زاویه دیگری دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل مثلثاتی اهمیت این ارتباطات را درک کنند و با آموختن موضوعات مثلثاتی علاقه مند گردد.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار های انفرادی ، گروپی، مباحثه و ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی،تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، در صورتیکه چارت شکل ورودی موجود باشد. جواب سؤالات ورودی توضیح گردد. چون $30^\circ+60^\circ=90^\circ$ می شود پس $\sin 60=\cos 30^\circ$ است و چون $90+60=150^\circ$ می شود. $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ $\cos 150^\circ=\cos(90^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 150^\circ=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\cot 60^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم، از روی چارت شکل ورودی مساوی بودن مثلث های $O\overset{\Delta}{H}M$ و $OH'M'$ را توضیح نماید.

و بعد از جنس نسبت های مثلثاتی زاویه حاده θدریافت نسبت های مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ را از روی شکل با سهم گیری شاگردان توضیح کند. فعالیت صفحه (183) این درس را شاگردان در گروپ ها کار کنند و نماینده یک گروپ کار خود را به دیگران توضیح کند.

استاد محترم، مثال اول صفحه184 را با سهم گیری شاگردان حل کند و فعالیت صفحه184 را شاگردان کار کنند.

رابطه نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد در شکل توضیح گردد و مثال دوم را با سهم گیری شاگردان حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس می توانید سؤال اول تمرین درس را حل کنید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال دوم تمرین این درس را از شاگردان بپرسید.

جواب به سؤال های تمرین

1- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 135° را در یابید.

حل:

$$\sin(135^\circ) = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(135^\circ) = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(135^\circ) = \tan(90^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1 \qquad \cot(135^\circ) = \cot(90^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\sec(135^\circ) = \sec(90^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \csc(135^\circ) = \csc(90^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

2- نسبت های مثلثاتی زاویه 150° را دریابید.

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 150^\circ = \cot g(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \sec(90^\circ + 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150^\circ = \csc(90^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

3- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = ?$

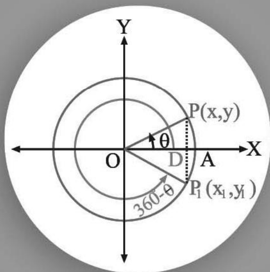
$a)\ \cos x \qquad b)\ \sin x \qquad c)\ -\cos x \qquad d)\ -\sin x$

حل: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = ?$

$a)\ \tan\theta \qquad b)\ -\tan\theta \qquad c)\ \cot\theta \qquad d)\ -\cot\theta$

حل: $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$



رابطه بین نسبت های مثلثاتی زاویه های
که مجموعه یا فرق شان 2π یا 360° باشند

صفحهٔ کتاب درسی: (187)   وقت تدریس: (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان در اخیر این درس باید:
– دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• طریق یافتن نسبت های مثلثاتی زاویه $(360^\circ - \theta)$ را از روی نسبت های مثلثاتی زاویه حاده θ بدانند. • طریق یافتن نسبت های مثلثاتی زوایایی کوتر مینل را بیاموزند. • نسبت های مثلثاتی زوایایی که در ربع چهارم واقع اند دریافت کرده بتوانند. • نسبت های مثلثاتی زوایایی کوترمینل را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل مثلثاتی اهمیت این ارتباطات را درک کنند.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کار های گروپی، انفرادی، مباحثه و...
مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی جواب سؤال ورودی توضیع گردد چون در ربع چهارم cos و sec زوایا، مثبت می باشند و چهار نسبت متباقی منفی می باشند پس: $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم، در صورت که چارت شکل ورودی موجود باشد، تساوی مثلث های $\overset{\Delta}{OPD}$ و $\overset{\Delta}{OP_1D}$ را به شاگردان توضیح کند. بعد طریق یافتن نسبت های مثلثاتی زوایای $(360^\circ - \theta)$ از روی نسبت های زاویه حاده θ را به شاگردان واضح سازد.

فعالیت صفحه (187) این درس را شاگردان در گروپ ها کار کنند و نتیجه کار خویش را به دیگران واضح سازند.
بعد استاد مثال اول صفحه (187) این درس را با سهم گیری شاگردان در شکل کار کند و فعالیت دوم صفحه (188) این درس را شاگردان اجرا کنند بعد معلم محترم طریق یافتن نسبت های مثلثاتی زوایایی کوترمینل را در شکل به شاگردان توضیح نماید و مثال های دوم، سوم و چهارم صفحه (189) حل شود بعد از این که مثال پنجم صفحه (190) حل شود، فعالیت صفحه (191) را شاگردان اجرا کنند.

تحکیم درس (7) دقیقه

سؤال اول صفحه (192) این درس حل شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

سؤال دوم این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

- نسبت های مثلثاتی زاویه -3660° عبارت اند از:

چون:

$$-3660^\circ + 60 = -3600^\circ = -10 \cdot 360^\circ$$

$$\sin(-3660^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-3660^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-3660^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot(-3660^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

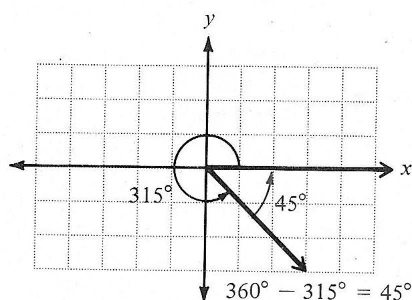
- .

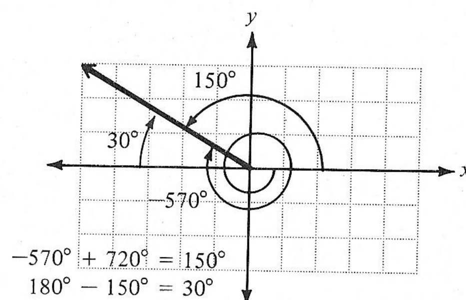
$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

- . $\tan(315^\circ)$, $\cos(-570^\circ)$ و $\cot 600^\circ$ قرار ذیل می باشد.





چون ضلع دوم زاویه 315° درربع چهارم قرار دارد؛ پس علامت $\tan 315^\circ$ منفی می باشد.

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

کوچکترین زاویۀ که با زاویه -570° کوترمینل باشد عبارت است از: $-570^\circ + 720^\circ = 150^\circ$

چون ضلع دوم زاویۀ 150° در ربع دوم قرار داد، برای این زاویه، زاویۀ مربوطه آن را در میابیم.

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\cos(-570^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$600^\circ - 360^\circ = 240^\circ$$

$$240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\cot 600^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بعضی از نسبت های مثلثاتی زاویه های داده شده قرار زیر می باشند.

$\sin 135^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 120^\circ$ $-\frac{1}{2}$	$\tan 150^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos 210^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 225^\circ$ 1	$\sin 300^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 330^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sin 0^\circ$ 0	$\cos 0^\circ$ 1
$\sin 90^\circ$ 1	$\cos 90^\circ$ 0	$\tan 270^\circ$ تعریف نشده
$\cos 180^\circ$ -1	$\tan 90^\circ$ تعریف نشده	$\sin(-90^\circ)$ -1
$\tan(-180^\circ)$ 0	$\sin 720^\circ$ 0	$\cos 1080^\circ$ 1
$\sin 495^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(-45^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-135^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(-405^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan(-150^\circ)$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan(-30^\circ)$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos 810^\circ$ 0	$\tan 390^\circ$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 780^\circ$ $\sqrt{3}$
$\sec 120^\circ$ -2	$\cot 150^\circ$ $-\sqrt{3}$	$\csc(-660^\circ)$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cot(-765^\circ)$ -1	$\sec 405^\circ$ $\sqrt{2}$	$\csc 1140^\circ$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

جواب به سؤال های تمرین

1- نسبت های مثلثاتی زوایای 480° و 390° را دریابید.

حل:

$$\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 480^\circ = \cos 120^\circ = \cos(180 - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 480^\circ = \frac{1}{\cos 480^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\csc 480^\circ = \frac{1}{\sin 480^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 390^\circ = \cot(360^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 390^\circ = \frac{1}{\cos 390^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc 390^\circ = 2$$

2- نسبت های مثلثاتی زوایایی 600° و 300° را دریابید.

حل:

$$\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) = \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 600^\circ = \tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\cot 600^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec 600^\circ = -2$

$\csc 600^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\cot 300^\circ = \cot(360^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec 300^\circ = \sec 60^\circ = 2$

$\csc 300^\circ = \cos ec 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

3- نسبت های مثلثاتی زوایایی (1830°) و ($1095^\circ\ 20'$) را دریابید.

حل جزء اول:

$1830^\circ = (5 \cdot 360^\circ + 30^\circ)$

$\sin(1830^\circ) = \sin(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos(1830^\circ) = \cos(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(1830^\circ) = \tan(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot(1830^\circ) = \sqrt{3}$

$\sec(1830^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc(1830^\circ) = \csc 30^\circ = 2$

حل جزء دوم:

$\sin(1095^\circ\ 20') = \sin(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \sin 15^\circ\ 20' = (0.2644)$

$\cos(1095^\circ\ 20') = \cos(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \cos 15^\circ\ 20' = 0.9644$

$\tan(1095^\circ\ 20') = \tan(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \tan 15^\circ\ 20' = 0.2742$

$\cot(1095^\circ\ 20') = \cot(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \cot 15^\circ\ 20' = 3.6470$

$\sec(1095^\circ\ 20') = \sec(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \sec 15^\circ\ 20' = 1.037$

$\csc(1095^\circ\ 20') = \csc(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \csc 15^\circ\ 20' = 3.782$

4- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{25\pi}{6}$ رادیان را دریابید.

حل: چون:

$$\frac{25\pi}{6}=750^\circ=(2\cdot 360^\circ+30^\circ) \text{ یا } \frac{25\pi}{6}=4\pi+\frac{\pi}{6}=2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6}$$

پس:

$$\sin\frac{25\pi}{6}=\sin(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{25\pi}{6}=\cos(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{25\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot\frac{25\pi}{6}=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3} \qquad \sec\frac{25\pi}{6}=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{25\pi}{6}=\csc\frac{\pi}{6}=2$$

5- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{5\pi}{3}=300^\circ$ رادیان را دریابید.

حل:

$$\sin\frac{5\pi}{3}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{3}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3} \qquad \cot\frac{5\pi}{3}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\frac{5\pi}{3}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{3})=\sec\frac{\pi}{3}=2 \qquad \csc\frac{5\pi}{3}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\csc\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

6- نسبت های مثلثاتی زوایای $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ را دریابید.

جزء اول:

$$(\frac{41\pi}{6})^R=1230^\circ=(3\cdot 360^\circ+150)$$

$$\sin(\frac{41\pi}{6})^R=\sin(2\cdot 3\pi+\frac{5\pi}{6})=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{41\pi}{6}=\cos(2\cdot 3\pi+\frac{5\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{41\pi}{6}=\tan(2\cdot 3\pi+\frac{5\pi}{6})=\tan\frac{5\pi}{6}=\tan(\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{41\pi}{6}=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{41\pi}{6}=-\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc\frac{41\pi}{6}=\csc\frac{\pi}{6}=2$$

جزء دوم:

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan(\pi+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{4\pi}{3}=\cot(\pi+\frac{\pi}{3})=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\frac{4\pi}{3}=\sec(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sec\frac{\pi}{3}=-2$$

$$\csc\frac{4\pi}{3}=\csc(\pi+\frac{\pi}{3})=-\csc\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

جزء سوم:

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos\frac{3\pi}{4}=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4}=\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1 \quad , \quad \cot\frac{3\pi}{4}=\cot(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sec\frac{3\pi}{4}=\sec(\pi-\frac{\pi}{4})=-\sec\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

$$\csc\frac{3\pi}{4}=\csc(\pi-\frac{\pi}{4})=\csc\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

7- نسبت های مثلثاتی زوایای -300° ، 780° و 420° را دریابید.

جزء اول:

$$\sin(-300^\circ)=\sin(-360+60)=\sin\left[-(360-60)\right]=\sin(360^\circ-60^\circ)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-300^\circ)=\cos\left[-(360-60)\right]=\cos(360-60)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\tan(-300^\circ)=\tan\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=-\tan(360^\circ-60^\circ)=(-\tan 60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\cot(-300^\circ)=\cot\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=-\cot(360-60)=-(-\cot 60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(-300^\circ)=\sec\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=\sec(360^\circ-60^\circ)=\sec 60^\circ=2$$

$$\csc(-300^\circ)=\csc\left[-(360-60)\right]=-\csc(360^\circ-60^\circ)=-(-\csc 60^\circ)=\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

جزء دوم:

$$\sin 780^\circ=\sin(2\cdot 360+60)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 780^\circ=\cos(2\cdot 360+60)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\tan 780^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\cot 780^\circ=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 780^\circ=\sec 60^\circ=2$$

$$\csc 780^\circ=\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

جزء سوم:

$$\sin 420^\circ = \sin(360+60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 420^\circ = \cos(360+60) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\tan 420^\circ = \tan(360+60) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$
$$\cot 420^\circ = \cot(360+60) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec 420^\circ = \sec 60^\circ = 2$$
$$\csc 420^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$$\cos(-3\pi) = \cos(-2\pi - \pi) = \cos[-(2\pi + \pi)] = \cos(2\pi + \pi) = \cos\pi = -1$$

یا:

$$\cos(-3\pi) = \cos(-\pi) = \cos\pi = -1$$

جزء b درست است.

9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) هرسه درست نیست.

حل:

$$\cos(-15\pi) = \cos(-2\cdot 7\pi - \pi) = \cos[-(2\cdot 7\pi + \pi] = \cos(2\cdot 7\pi + \pi) = \cos\pi = -1$$

یا :

$$\cos(-15\pi) = \cos(-\pi) = \cos\pi = -1$$

جزء b درست است.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

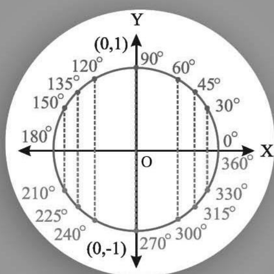
حل:

$$\sin(-1110^\circ) = \sin(-3\cdot 360 - 30) = \sin[-(3\cdot 360 + 30)] = -\sin(360+30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

یا:

$$\sin(-1110^\circ) = \sin(-30) = -\frac{1}{2}$$

جزء b درست است.



گراف های توابع مثلثاتی

صفحهٔ کتاب (193)   وقت تدریس (2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• ناحیه های تعریف و range توابع $\sin x$ و $\cos x$ را بشناسند. • پریود و دامنه توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بشناسند. • تعریف توابع متناوب را بیاموزند. • طریق رسم کردن گراف های توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیاموزند. • تحول توابع $\sin x$ و $\cos x$ را بفهمند و گراف های آن ها رسم کرده بتوانند. • نقاط تقاطع این گراف ها را با محور های x و y تشخیص کرده بتوانند. و نقاط اعظمی و اصغری این گراف ها را نشان داده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی اهمیت رسم گراف های این توابع را درک کنند و علاقه مند به فرا گرفتن آن شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار های انفرادی، گروپی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی ، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی در چارت شکل ورودی سؤالات ورودی توضیح گردد. که دوره تناوب یا پریود توابع $\sin x$ و $\cos x$ عبارت از 2π می باشدو ناحیه تعریف $(domain)$ این توابع ست تمام اعداد حقیقی می باشد.

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم، در شکل ناحیه های تعریف و قیمت های این توابع را به شاگردان توضیح کند و نیز واضح شود که $-1\le \sin x,\cos x\le 1$ یا $Range$ این توابع انترول $[-1,1]$ می باشد.

سؤالات فعالیت صفحه (193) از شاگردان پرسیده شود، استاد محترم آنها را رهنمای و همکاری نماید، و به شاگردان توضیح دهد که کدام توابع را توابع متناوب می گویند. استاد محترم گراف های تابع $\sin x$ را بر حسب درجه و رادیان طوریکه در کتاب درسی رسم شده روی تخته رسم و توضیح کند که این گراف محور x را در کدام نقاط قطع می کنند و نیز واضح شود که تابع $\sin x$ در کدام انتروال ها متزاید و در کدام انتروال ها متناقص می باشد فعالیت صفحه (196) را شاگردان کار کنند و مثال های اول و دوم را استاد محترم با سهم گیری شاگردان حل کند همچنان دامنه و پریود توابع $\sin x$ و $\cos x$ را در مثال سوم؛ به شاگردان توضیح دهد همچنان گراف تابع مثال چهارم را استاد محترم با سهم گیری شاگردان رسم نماید. گراف تابع $\cos x$ را با نشان دادن تحول این تابع بر حسب درجه و رادیان رسم کند و نیز در شکل قیمت های $range$ این تابع نشان داده شود.

فعالیت صفحه (201) را شاگردان اجرا کند.

مثال صفحه (201) را استاد محترم با سهم گیری شاگردان حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

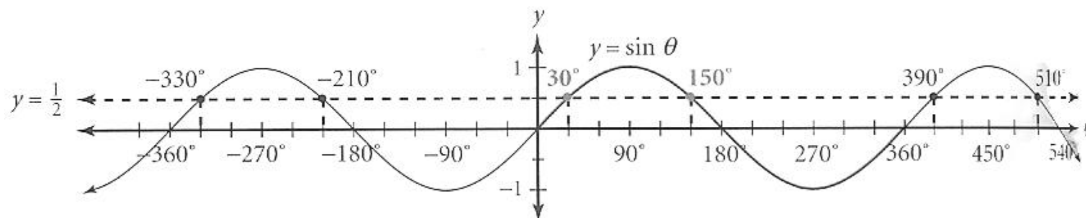
گراف تابع $F(t)=\sin t$ در انتروال $[2\pi,6\pi]$ مربوط سؤال اول تمرین این درس را رسم کنید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

گراف قسمت دوم سؤال اول تمرین را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

در انتروال $[-360^\circ,540^\circ]$ برای قیمت های $\theta=-330^\circ,-210^\circ,30^\circ,150^\circ,390^\circ,510$ ، $y=\sin\theta=\frac{1}{2}$ می شود.



1- تابع F را متناوب می گویند، در صورتیکه عدد خلاف صفر مانند T وجود داشته باشد.

طوریکه اولاً $x\in D_F$, $x+T$ و $x-T$ نیز درساحه تعریف F شامل بوده

ثانیاً: $F(x+T)=F(x)$ باشد. کوچکترین عددی مثبتی مثل T که در این رابطه صدق می کند به نام پریود یا تناوب اصلی تابع F یاد میشود. اگر T دوره تناوب تابع باشد پس $-T$ نیز دوره تناوب تابع می باشد. و چون می دانیم که $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ و $\cos(2k\pi+x)=\cos x$ می باشد بنابر آن توابع $\sin$ و $\cos$ متناوب بوده و 2π کوچکترین عددمثبتی است که د رابطه های فوق صدق می کند طورمثال دوره تناوب یا پریود تابع $F(x)=\sin ax$ قرار زیر به دست می اید.

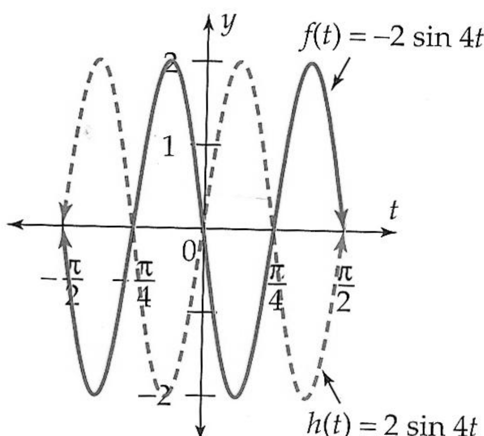
$$F(x+T)=F(x)\Rightarrow \sin a(x+T)=\sin ax$$
$$\sin(ax+aT)=\sin ax$$

برای اینکه مساوات فوق صدق کند باید $aT=2K\pi$ باشد که K عدد تام است در نتیجه $T=\frac{2K\pi}{a}$ میباشد.

بنابر آن تابع F متناوب است و دوره تناوب اصلی آن $\frac{2\pi}{|a|}$ میباشد.

همچنین پریود یا دوره تناوب تابع $F(x)=\cos at$ نیز $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد.

دامنهٔ (Amplitude) تابع: در صورتیکه $a\neq 0$ و $b>0$ باشد، دامنهٔ توابع $F(t)=a\sin bt$ و $F(t)=a\cos bt$



عبارت از $|a|$ و پریود آن $\frac{2\pi}{b}$ می باشد.

طور مثال: دامنه و پریود تابع $F(t)=-2\sin 4t$ عبارت از $|a|=|-2|=2$ و پریود آن $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ میباشد. و گراف این تابع در انتروال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ رسم شده است.

2- به طور خلص می توانیم بگوییم که اگر تابعی در فاصله های مساوی به طور متوالی و منظم تکرار شود آن تابع را تابع متناوب و طول فاصله های تکرار شده را دوره تناوب می گویند؛ طور مثال: تابع $g(x)=\sin x$ در انتروال های $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ ، $[0,2\pi]$ و... تکرار می شود پس دوره تناوب این تابع 2π می باشد.

3- متوجه باید بود که بعضی اوقات یک تابع متناوب می باشد اما دوره تناوب اصلی نمی داشته باشد. به طور مثال:

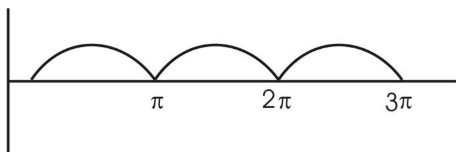
$F(x)=3$

4- اگر عدد T دوره تناوب اصلی F باشد، هر دوره تناوب دیگر F مضرب طبیعی T می باشد.

و یکی از روش های دریافت دوره تناوب اصلی تابع روش شهودی و رسم گراف آن است.

طورمثال: دوره تناوب اصلی تابع $F(x)=|\sin x|$ قرار ذیل به دست می آید.

مشاهده می شود که گراف تابع در انتروال های $[0,\pi]$،$[\pi,2\pi]$ و $[2\pi,3\pi]$ و... تکرار می شود؛ پس تناوب اصلی این تابع (π) می باشد.



روش دوم: توسط روش ریاضی از مساوات $F(x+T)=F(x)$ قیمت T را به دست می آوریم که عبارت از پریود اصلی می باشد.

مثال: دوره تناوب اصلی تابع $F(x)=\cos x$ عبارت است از:

$$F(x+T)=\cos(x+T)$$
$$F(x)=\cos x$$
$$F(x+T)=F(x)\Rightarrow \cos(x+T)=\cos x=\begin{cases}x+T=2K\pi+x, & T=2K\pi, K\in z\\ x+T=2k\pi-x\end{cases}$$
$$T=2\pi,4\pi,6\pi,8\pi..........$$

اگر به k قیمت های اعداد طبیعی داده شود؛ پس دوره تناوب اصلی این تابع 2π می باشد.

5- اگر دوره تناوب اصلی تابع متناوب F عدد T باشد؛ پس تابع $F(ax+b)$ نیز متناوب بوده و دوره تناوب تابع $T'=\frac{T}{|a|}$ می باشد. یا $T_{F(ax+b)}=\frac{T_{F(x)}}{|a|}$ می باشد.

مثال: اگر دوره تناوب اصلی (پریود اصلی) تابع $F(2x)$ عدد 3 باشد، دوره تناوب اصلی $y=F(-3x+1)$ کدام عدد است؟

$$T_{F(2x)}=\frac{T_{F(x)}}{2}\Rightarrow 3=\frac{T_{F(x)}}{2}\Rightarrow T_{F(x)}=3\cdot 2=6$$

$$T_{F(-3x+1)}=\frac{T_{F(x)}}{|-3|}=\frac{6}{3}=2$$

پس دوره اصلی تناوب تابع $F(-3x+1)$ عبارت از عدد (2) می باشد.

اگر 5 کوچکترین عددی باشد که $F(x+5)=\frac{1}{F(x)}$ باشد دوره تناوب تابع F عبارت است از:

$$F(x+5+5)=\frac{1}{F(x+5)}\Rightarrow F(x+10)=\frac{1}{F(x+5)}$$

چون $\frac{1}{F(x+5)}=F(x)$ می باشد؛ پس $F(x+10)=F(x)$ می شود.

بنابرآن دوره تناوب تابع Fعبارت از عدد 10 می باشد.

به طور خلص:

دوره تناوب اصلی تابع $F(x)=\sin(ax+b)$ عبارت از $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد.

دوره تناوب اصلی تابع $F(x)=\cos(ax+b)$ عبارت از $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد.

دوره تناوب اصلی تابع $F(x)=\tan(ax+b)$ عبارت از $T=\frac{\pi}{|a|}$ می باشد.

دوره تناوب اصلی تابع $F(x)=\cot(ax+b)$ عبارت از $T=\frac{\pi}{|a|}$ می باشد.

- اگر دوره تناوب تابع Fمساوی به عدد T باشد دوره های تناوب توابع

$g(x)=aF(x)+b$ و $g(x)=\frac{a}{F(x)},(a\neq 0)$ نیز عدد T می باشد.

غرض ترسیم گراف توابع $\sin x$ و $\cos x$ قدم های ذیل را باید در نظر داشته باشیم

1- پریود را به دست آورید $(\frac{2\pi}{b})$ و بالای محور x نقاط صفر و $\frac{2\pi}{b}$ را تعین کنید.

2- انتروال ازصفر الی $\frac{2\pi}{b}$را به چهار حصه مساوی تقسیم کنید.

3- نقاطی را تعین کنید که گراف محور x را در آن نقاط قطع می کند.

تابع	گراف محور x را قطع می کند.
$y=a\sin bx$	در نقاط $0,\frac{\pi}{b}$ و $\frac{2\pi}{b}$ (نقطه شروع، نقطه وسط، نقطه اخرانتروال)
$y=a\cos bx$	در نقاط $\frac{\pi}{2b},\frac{3\pi}{b}$ (در نقطه $\frac{1}{4}$ حصه و در نقطه $\frac{3}{4}$ حصه انتروال)

4- نقاط اعظمی و اصغری گراف را تعین کنید.

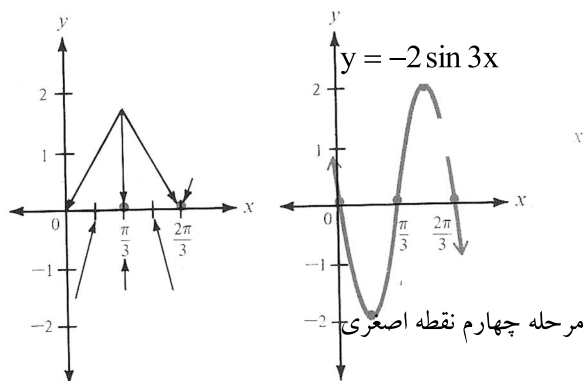
تابع	گراف یک نقطه اعظمی دارد وقتی که x مساوی به:
$y=a\sin bx$	$\frac{\pi}{2b}$ $(a>0)$ یا $\frac{3\pi}{b}$ برای $a<0$
$y=a\cos bx$	0 و $\frac{\pi}{2b}$ برای $a>0$ یا $\frac{\pi}{b}$ برای $a<0$

5- در جدول چند نقطهٔ دیگری را نیز دریابید و گراف آن را رسم کنید.

6- به طرف راست و چپ پریود های دیگری را برحسب ضرورت علاوه و گراف را رسم کنید.

مثال: گراف های توابع $y=-2\sin 3x$ ، $y=3\cos\frac{1}{2}x$ و $y=3\cos 2\theta+1$ را رسم کنید.

پریو $y=-2\sin 3x$ عبارت از $\frac{2\pi}{3}$ می باشد. و دامنهٔ (amplitude) آن عبارت از $|-2|$ می باشد. با در نظر داشت مراحل فوق گراف را رسم کنید.

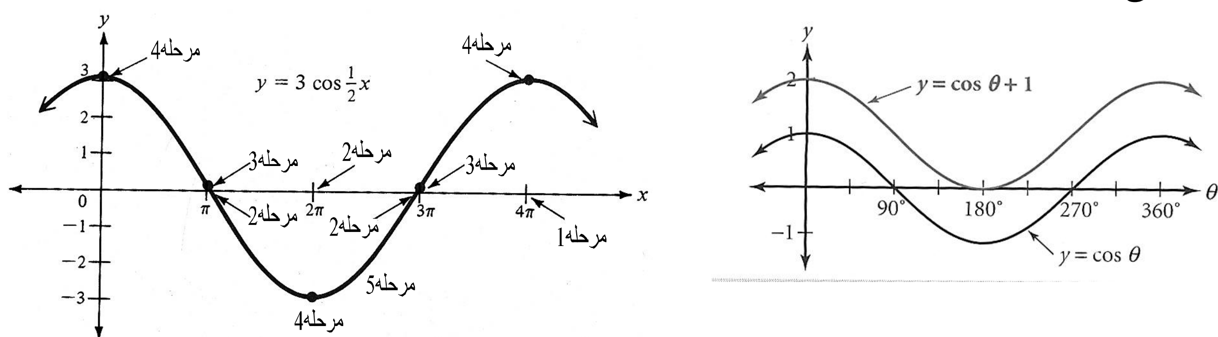


مرحله دوم انتروال را به چهار حصه مساوی تقسیم کنید.

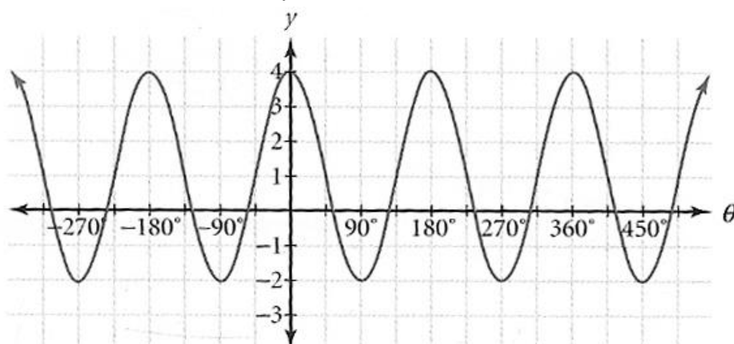
پریود تابع $y=3\cos\frac{1}{2}x$ عبارت از $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ می باشد.

مراحل رسم گراف در شکل ذیل مشاهده می شود.

گراف توابع $y=\cos\theta$ ، $y=\cos\theta+1$ و $y=3\cos\theta+1$ را درشکل مشاهده کنید.



$y=3\cos 2\theta+1$

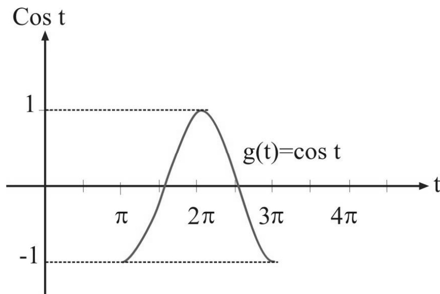


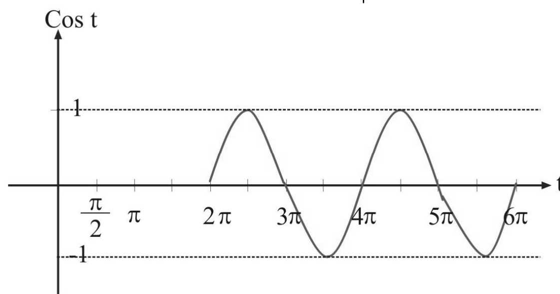
جواب به سؤال های تمرین

1- گراف توابع زیر را در انتروال های داده شده رسم کنید.

$a)\ f(t)=\sin t\ :[2\pi,6\pi]\qquad b)\ g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$

θ	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\cos\theta$	-1	0	1	0	-1





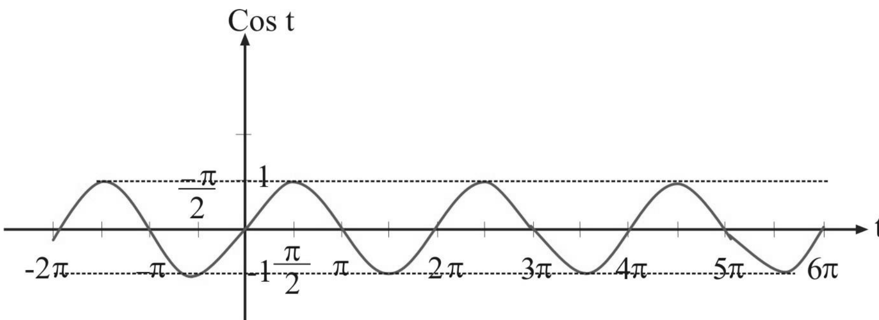
θ	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

2- برای کدام قیمت های t در انتروال $[-2\pi,6\pi]$ ، $\sin t=1$ می باشد؟

حل:

t	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\sin t$	0	1	0	1	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

در انتروال فوق برای قیمت های $(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2})$ قیمت $\sin t$ مساوی به 1 میباشد.

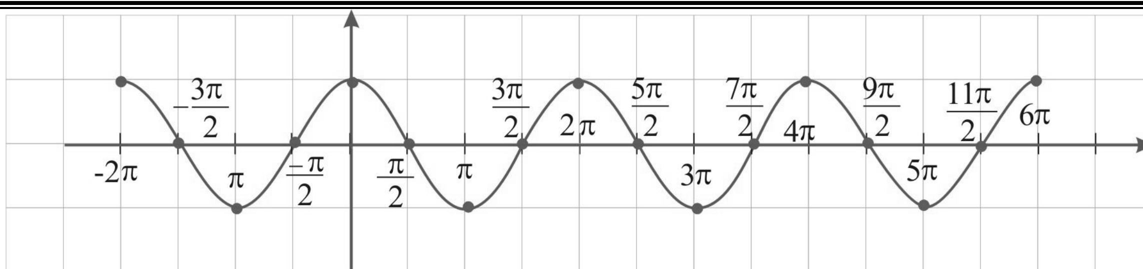


3- برای کدام قیمت های t در انتروال $[-2\pi,6\pi]$, $\cos t=0$ می باشد؟

حل:

t	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	
$\cos t$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	

t	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\cos t$	0	1

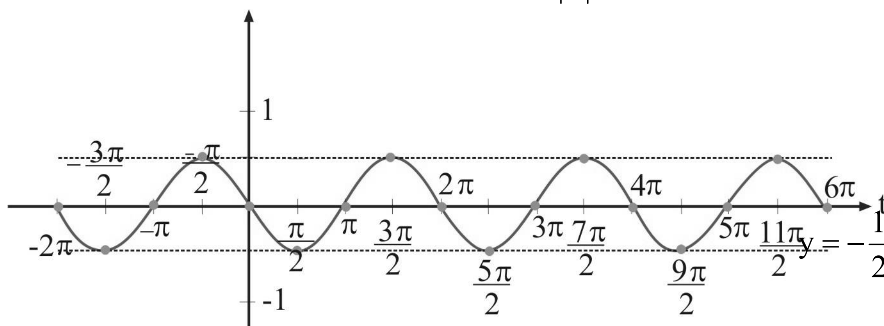


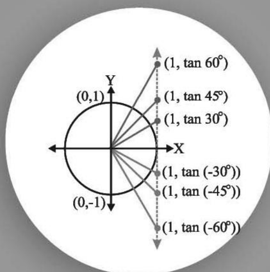
در انتروال فوق برای قیمت های $(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2})$ قیمت $\cos t$ مساوی به صفر میباشد.

4- گراف تابع $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ را در انتروال $[-2\pi,6\pi]$ رسم کنید.

t	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$11\frac{\pi}{2}$	6π
$\sin t$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$-\frac{1}{2}\sin t$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

پریود تابع $y=-\frac{1}{2}\sin t$ عبارت از 2π و دامنهٔ آن $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ میباشد.





گراف تابع تانجانت

صفحهٔ کتاب (203) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان در اخیر این درس باید:
• طریق رسم کردن گراف تابع $f(t)=\tan t$ را بیاموزند.
• ناحیه تعریف و ناحیه قیمت های تابع $f(t)=\tan t$ را بشناسند.
• بدانند تابع تانجانت برای زوایای که cos آن ها صفر باشد، تعریف نشده است.
• مجانب عمودی تابع تانجانت را بشناسند.
• پریود تابع تانجانت را بدانند و بفهمند که تابع tan یک تابع طاق و تابع متزاید می باشد.
• گراف این تابع را رسم کرده بتوانند وتحول این تابع را درک کنند.
• مجانب های عمودی تابع تانجانت را رسم کرده بتوانند.
• در حل مسایل ریاضی اهمیت خاصیت های این تابع را درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کار های گروپی، انفرادی، مباحثه و...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت و...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود و جواب سؤال این است که بلی تابع تانجانت هر وقت یک تابع متزاید می باشد</td></tr>
</table>

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

استاد محترم، شکل ورودی را به شاگردان توضیح داده از روی چارت گراف تابع تانجانت را نشان دهد.

زوایایی که cos آن صفر است تابع tan در آن قیمت ها مجانب های عمودی دارند از قبیل زوایای $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$ یا ..... $\frac{-\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}$ و غیره که در ساحه تعریف تابع تانجانت شامل نمی باشد یا برای زوایای که مضرب طاق $\frac{\pi}{2},\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$ و یا $k\pi+\frac{\pi}{2}$ باشند این تابع تعریف نشده است.

تحول تابع تانجانت در جدول و در شکل توضیح گردد، تا شاگردان درک کنند که تابع tan هر وقت یک تابع متزاید می باشد همچنان نظر به تعریف تابع طاق $(\tan(-t)=-\tan(t))$ نیز درک کنند که این تابع یک تابع طاق می باشد گراف این تابع را بر حسب درجه نیز رسم نماید. مثال صفحه (205) را استاد محترم با سهم گیری شاگردان حل کند و در شکل نقاط که قیمت تانجانت آن (-1) می باشد نشان داده شود.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس حل گردد.

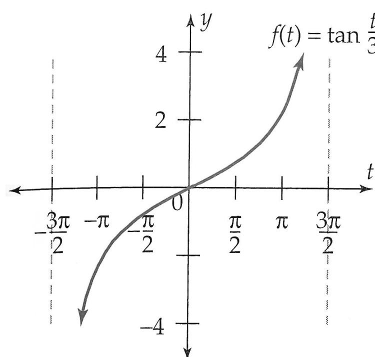
ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

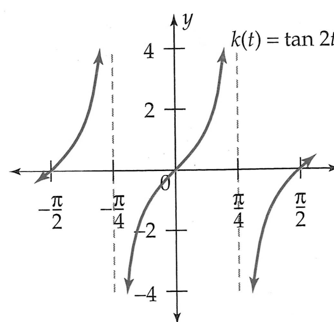
بعد از خلص درس ، سؤال سوم تمرین از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

- تابع $F(t)=\tan(bt)$ اگر $b>0$ باشد به تعداد b دور مکمل از $-\frac{\pi}{2}$ الی $\frac{\pi}{2}$ می سازد؛ پس پریود این تابع $\frac{\pi}{b}$ می باشد.

طور مثال پریود تابع $F(t)=\tan 2t$ عبارت از $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ می باشد که از $-\frac{\pi}{4}$ الی $\frac{\pi}{4}$ یک دور مکمل خود را میسازد وپریود تابع $F(t)=\tan\frac{t}{3}$ عبارت از $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$ می باشد. گراف های این توابع را مشاهده کنید.





طور مثال: دوره تناوب یا پریود تابع $F(x)=\tan(ax)$ عبارت است از:

$$F(x+T)=F(x)=\tan a(x+T)=\tan(ax)$$

و

$$\tan(ax+aT)=\tan(ax)$$

می باشد.

برای اینکه مساوات فوق صدق کند باید $aT=K\pi$ باشد، که در نتیجه $T=\frac{K\pi}{a}$ می شود. که تناوب اصلی این تابع $\frac{\pi}{a}$ می باشد.

- به طور خلص مراحل ترسیم گراف $y=a\tan bx$ در یک پریود که $b>0$ باشد قرار زیر می باشد:

1- پریود $(\frac{\pi}{b})$ را دریابید.

2- بالای محور x از صفر شروع کنید و دو انتروال به اندازهٔ نصف پریود به طرف راست و چپ تعیین کنید.

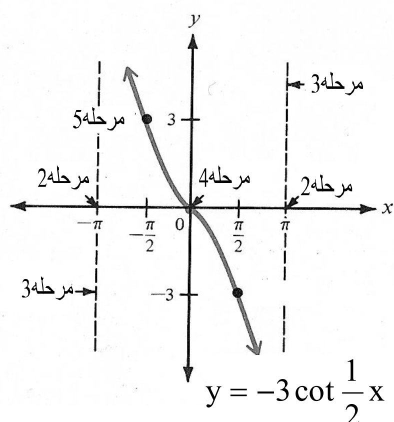
3- در آخر نقاط انتروال مرحله دوم مجانب های عمودی را توسط نقطه نقطه رسم کنید.

4- نقطه $(0,0)$ را نشانی کنید.

5- گراف را رسم کنید و برحسب ضرورت چند نقطه دیگری را نیز علاوه کنید.

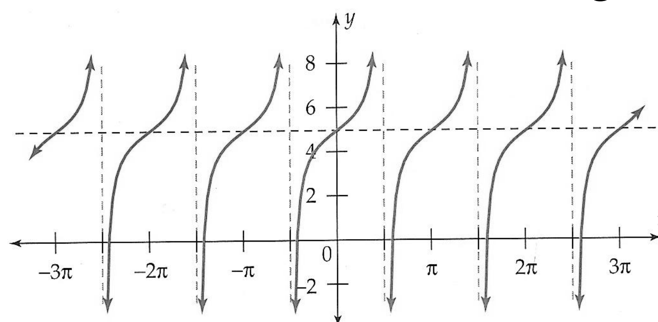
6- به هر دو طرف راست و چپ پریود های دیگری را بر حسب ضرورت علاوه کنید.

طور مثال گراف تابع $y=-3\cot\frac{1}{2}x$ طور ذیل در شکل نشان داده شده است.



مثال: گراف تابع $h(t)=\tan t+5$ در انتروال $[-3\pi,3\pi]$ قرار ذیل میباشد.

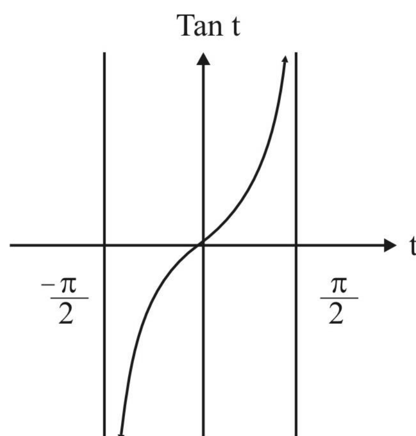
از مبحث توابع میدانید که گراف تابع $F(t)=\tan t$ به طور عمودی (5) واحد به طرف بالا انتقال کرده است.



جواب به سؤال های تمرین

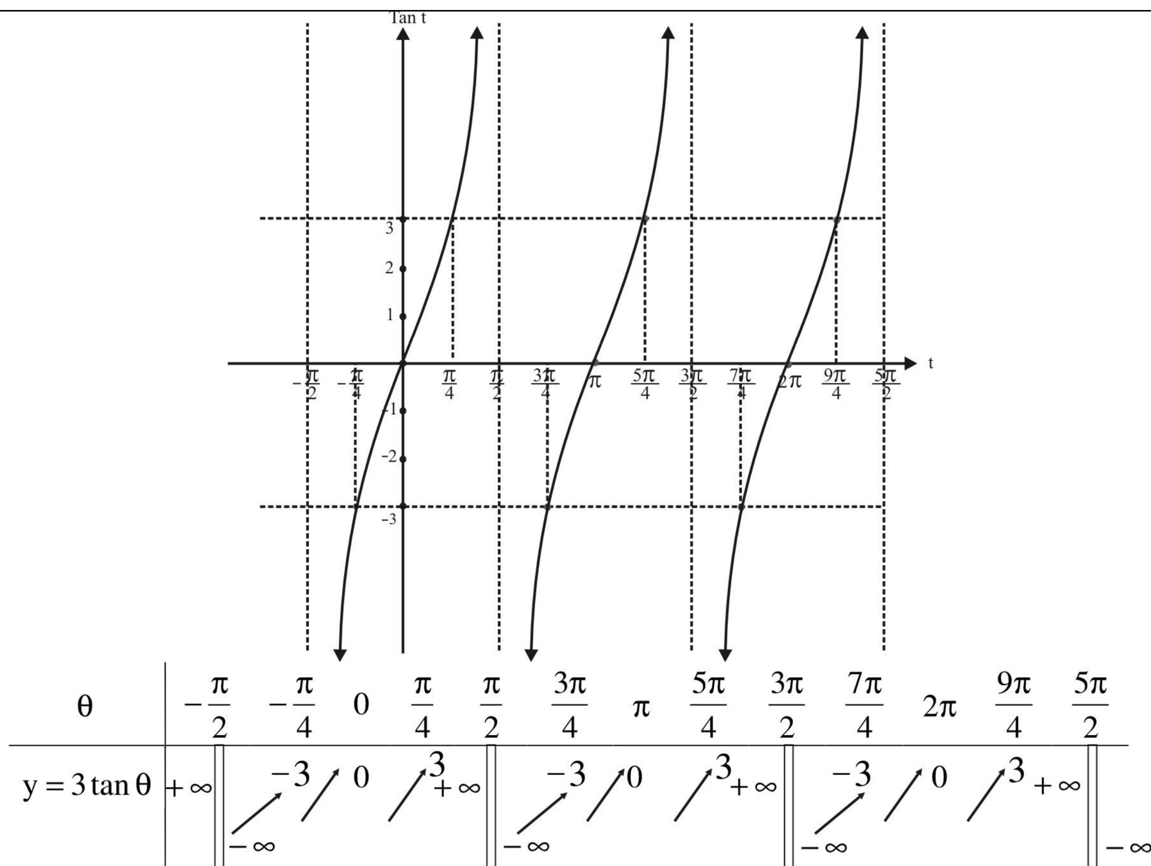
1- به کدام قیمت زاویهٔ t ,قیمت تابع $\tan(t)$ در انتروال $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کمتر از صفر است؟

حل:



اگر t در انتروال $(-\frac{\pi}{2},0)$ قیمت بگیرد قیمت $\tan(t)$ در انتروال $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کوچکتر از صفر میشود.

2- گراف تابع $y=3\tan\theta$ را رسم کنید.



θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$y = 3\tan\theta$	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$

3- پریود تابع $\tan\theta$ عبارت است از:

a) 2π b) π c) 3π d) هر سه درست نیست

حل: پریود تابع $\tan\theta$ عبارت از π میباشد.

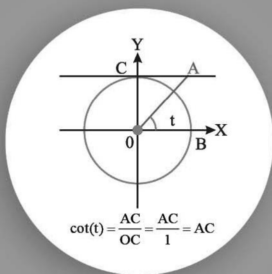
جواب درست جزء b میباشد.

4- اگر زاویهٔ θ از 0^{o} الی 90^{o} تحول کند تحول $\tan\theta$ عبارت است از:

a) از $-\infty$ تا -1 b) از صفر تا $+\infty$ c) از $-\infty$ تا $+\infty$

حل: اگر زاویهٔ θ از 0° الی 90° تحول کند، تحول $\tan\theta$ از صفر تا $+\infty$ میباشد.

جواب درست جزء b میباشد.



گراف های توابع cotangent (t)، $\sec ant(t)$ و $\cos ecant(t)$،

صفحهٔ کتاب (207)   وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • ناحیه های تعریف و قیمت های توابع sec,cot و csc را بشناسند. • طریق رسم کردن گراف های این توابع را بیاموزند. • معادلات مجانب های عمودی این توابع را دریافت کرده بتوانند. • بدانند که پریود تابع تانجانت π و پریود توابع sec و cscعبارت از 2π می باشد. • درک کنندکه تابع cotو csc طاق وتابع sec یک تابع جفت می باشد. • درک کنند که تابع cot یک تابع متناقص می باشد. • گراف های این توابع را رسم کرده بتوانند. • مجانب های عمودی این توابع را ر سم کرده بتوانند. • تحول این توابع را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، مناقشه، کارهای انفرادی، گروپی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی در صورت که چارت شکل ورودی موجود باشد، سؤال ورودی را از شاگردان بپرسید دوره تناوب تابع کوتانجانت π می باشد. کوتانجانت زاویه که sin e آن صفر باشد تعریف نشده است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

در صورت که چارت شکل گراف تابع کوتانجانت موجود باشد استاد محترم، ناحیه تعریف و قیمت های تابع کوتانجانت را به شاگردان توضیح کند بعد از روی شکل تحول تابع کوتانجانت را به شاگردان در جدول نشان داده شود، همچنین از روی شکل تحول تابع sec توضیح گردد که شاگردان ناحیه ها تعریف و ناحیه قیمت های این تابع را بشناسند و بفهمند در قیمت های که این تابع تعریف نشده باشد در آن قیمت ها مجانب های عمودی دارند و نیز انتروال های که در ان تابع sec متزاید و یا متناقص است در شکل نشان داده شود.

فعالیت صفحه(209) را شاگردان در گروپ ها کار کنند و نماینده یک گروپ کار خود را به دیگران توضیح کند، احیاناً اگر شاگردان مشکل داشتند، استاد محترم آنها را رهنمای و همکاری نماید به عین ترتیب در مورد تابع csc مثل تابع sec مراحل تدریس را مراعات نماید. و فعالیت صفحه(211)را شاگردان اجرا کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول و دوم تمرین صفحه (212) را حل کنید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

بعد از خلص، سؤال سوم و چهارم را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

گراف تابع $y = f(t) = \cot(t)$ از $-\pi$ الی π

میدانیم که $\cot(-t) = -\cot(t)$ و $\cot(\pi - t) = -\cot(t)$ می باشد.

پریود تابع cotنیز π می باشد؛ پس در رسم گراف این تابع می توانیم از جدول زیر استفاده نماییم.

t	$-\pi$ یا -180°	$-\frac{5\pi}{6}$ یا -150°	$-\frac{2\pi}{3}$ یا -120°	$-\frac{\pi}{2}-0$ یا $-90^\circ-0$	$-\frac{\pi}{2}+0$ یا $-90^\circ+0$	$-\frac{\pi}{3}$ یا -60°	$-\frac{\pi}{6}$ یا -30°	0	$\frac{\pi}{6}$ یا 30°	$\frac{\pi}{3}$ یا 60°
$\cot(t)$	$\pm\infty$	1.73	0.58	$+\infty$	$-\infty$	-0.58	-1.73	$\pm\infty$	1.73	0.58

$\frac{\pi}{2}-0$ یا -90°	$\frac{\pi}{2}+0$ یا $90^\circ+0$	$\frac{2\pi}{3}$ یا 120°	$\frac{5\pi}{6}$ یا 150°	π یا 180°
$+\infty$	$-\infty$	-0.58	-1.73	$\pm\infty$

همچنین غرض ترسیم گراف تابع $y = \sec(t)$ در انتروال $[0,360]$ از جدول زیر می توان استفاده نماییم.

t	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	1	1.15	2	∞	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$	2	1.15	1

y=csc(t)

t	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\csc(t)$	∞	2	1.15	1	1.15	2	$+\infty$ $-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$

جواب به سؤال های تمرین

1- تابع $f(t)=\cot(t)$ در کدام قیمت t تعریف نشده است؟ چرا؟

حل: چون تابع $\cot(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$ به قیمت $\sin t=0$ تعریف نشده یا غیر معین است؛ زیرا مخرج تابع صفر می شود.
برای قیمت های $t=n\pi$,(n یک عدد تام) قیمت $\sin t$ صفر میشود. یا به عبارت دیگر تابع $f(t)=\cot(t)$ به قیمت های مضرب تام π تعریف ناشده میباشد.

2- وقتی که زاویهٔ θ از $\dfrac{\pi}{2}$ به π تحول کند تحول $\cot\theta$ عبارت است از:

$a)\ 1\to-\infty$ $b)\ 0\to-\infty$ $c)$ هردو نادرست اند

حل: وقتی که زاویهٔ θ از $\dfrac{\pi}{2}$ به π تحول کند تحول $\cot\theta$ از صفر الی $-\infty$ میباشد. (جزء b درست است).

3- اگر $\hat{t}=\pi$ باشد قیمت $\cot(t)$ عبارت است از:

a) صفر b) -1 c) تعریف نشده است

حل: اگر $\hat{t}=\pi$ باشد قیمت $\cot(t)$ تعریف نشده است. (جواب درست جزء c میباشد).

4- : $Range$ توابع $\sec(t)$ و $cse(t)$ عبارت است از

$a)\ IR-\{t\,|-1<t<1\}$ $b)$ تمام اعداد حقیقی $c)\ IR-\{t\,|-1\le t\le 1\}$

حل: $Range$ توابع $\sec(t)$ و $cse(t)$ عبارت است از: تمام اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی به 1- بزرگتر ویا مساوی به 1 می باشد پس جزء c درست است.

5- ناحیهٔ تعریف($Domain$) تابع $f(t)=\csc(t)$ عبارت است از:

$a)$ تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام π $b)$ تمام اعداد حقیقی بدون مضرب طاق $\dfrac{\pi}{2}$
$c)$ تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام 2π $d)$ هرسه درست نیست

جواب: تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام π (جواب درست جزء a میباشد.)

6- تابع $f(t)=\csc(t)$ در انتروال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$a)$ متزاید است $b)$ متناقص است $c)$ نه متزاید است نه متناقص

حل: متناقص است جواب درست b میباشد.

1- زاویهٔ 42.6033° را به درجه، دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

حل: $42.6033^\circ = 42^\circ + (0.6033\cdot 60)' = 42^\circ(636.198) = 42^\circ + 36' + (0.198\cdot 60)'' = 42^\circ \quad 36^\circ \quad 11.8''$

2- اگر گردش ثانیه گرد یک ساعت 3 دقیقه و 25 ثانیه باشد ثانیه گرد چند رادیان زاویهٔ مثبت را طی می کند؟

حل: در سه دقیقه ثانیه گرد سه دور $6\pi = (3\cdot 2\pi)$ را طی می کند ودر $(25)''$ زاویهٔ را که طی میکند، عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{l} 30'' \text{——} \pi^R \\ 25'' \text{——} x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{25\cdot \pi^R}{30} = (\frac{5\pi}{6})^R$$

در نتیجه زاویه طی شده عبارت است از:

$$6\pi + \frac{5\pi}{6} = (\frac{41\pi}{6})^R$$

$$\frac{6\pi + 5\pi}{6} = (\frac{41\pi}{6})^R$$

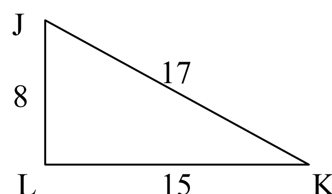
3- در مثلث JLK قیمت های زیر را دریابید.

$$\sin k = \frac{8}{17} \approx 0.4706 \quad , \quad \sin J = \frac{15}{17} \approx 0.8824 \quad , \quad \cos J = \frac{8}{17} \approx 0.4706$$

$$\cos k = \frac{15}{17} \approx 0.8827 \quad , \quad \tan k = \frac{8}{15} \approx 0.5333 \quad , \quad \tan J = \frac{15}{8} = 1.875$$

$$\sec k = \frac{17}{15} \approx 1.333 \quad , \quad \sec J = \frac{17}{8} = 2.125 \quad , \quad \cot J = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

$$\cot k = \frac{15}{8} = 1.875 \quad , \quad \csc J = \frac{17}{15} \approx 1.1333 \quad , \quad \csc k = \frac{17}{8} = 2.125$$



4- اگر شعاع یک دایره $20cm$ و طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $S = 85cm$ باشد زاویهٔ مرکزی چند رادیان است؟

حل:

$R = 20cm$

$s = 85cm \qquad \theta = \frac{S}{R} = \frac{85cm}{20cm} = (\frac{17}{4})^R$

$\theta = ?$

5- طول قوس های مقابل زوایای مرکزی یک رادیان، 2 رادیان را دریابید در صورت که قطر دایره $10cm$ باشد.

حل:

$\theta = 1^R$

$R = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow R = 5cm \qquad S = R\cdot\theta = 1\frac{cm}{cm}\cdot 5cm = 5cm$

$s = ?$

جزء دوم:

$$S = 2\frac{cm}{cm} \cdot 5cm = 10cm$$

6- اضلاع دوم زوایای داده شده زیر در کجا واقع می شود؟

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\ -7\pi\ ,\ \frac{11\pi}{2}\ ,\ -500^\circ\ ,\ -\pi\ ,\ 900^\circ$$

حل: ضلع دوم زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بالای جهت منفی محور y واقع می باشد.

ضلع دوم زاویهٔ -7π بالای جهت منفی محور x واقع می باشد.

ضلع دوم زاویهٔ $-\frac{11\pi}{2}$ بالای جهت مثبت محور y واقع میشود .

ضلع دوم زاویهٔ -500° در ناحیه سوم واقع می باشد.

ضلع دوم $-\pi$ بالای جهت منفی محور x واقع است و ضلع دوم 900° نیز بالای جهت منفی محورx واقع می باشد.

7- زوایای ذیل را که به رادیان داده شده اند به درجه تبدیل کنید.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\ \frac{\pi}{15}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{17\pi}{45}$$

حل:

$$\frac{\pi^R}{8} \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ \qquad \frac{\pi^R}{15} \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = \frac{180}{15} = 12^\circ$$

$$(\frac{\pi^R}{4}) \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = 45^\circ \qquad \frac{\pi^R}{3} \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = 60^\circ$$

$$\frac{\pi^R}{2} \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = 90^\circ \qquad \frac{\pi^R}{6} \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = 30^\circ$$

$$\frac{17\pi^R}{45} \cdot (\frac{180^\circ}{\pi}) = 68^\circ$$

8- در مدت 54 دقیقه، ساعت گرد و دقیقه گرد هریک چند رادیان می چرخند؟

حل:

$$60' \text{——} \frac{\pi}{6} \qquad 60' \text{——} 2\pi$$

$$54 \text{——} x \qquad 54 \text{——} x$$

$$x = \frac{54 \cdot \frac{\pi}{6}}{60} \qquad x = \frac{54 \cdot 2\pi}{60}$$

(ساعت گرد) $x = (\frac{3\pi}{20})^R$ $\qquad$ $x = (\frac{9\pi}{5})^R$ (دقیقه گرد)

9- اگر قطرتایر کوچک یک تراکتور یک متر و قطر بزرگ آن 120cm باشد وقتیکه تایر کوچک به اندازهٔ زاویهٔ 70° بچرخد تایر بزرگتر چند رادیان را طی میکند؟

حل: چون $S_1 = S_2$ و $70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi^R}{18}$:

$$r_1\theta_1 = r_2 \cdot \theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{r_1 \cdot \theta_1}{r_2} = \frac{100cm \cdot \frac{7\pi}{18}}{120cm} = \frac{700\pi}{120 \cdot 18} = (\frac{35\pi}{108})^R$$

10- چرخی در یک ساعت $300\,\text{Rev}$ دور میزند، در یک ثانیه چند رادیان را می پیماید؟

حل:

ساعت	دور
$1 =$	300
$\frac{1}{3600} = x$	

$\frac{1}{12} = \frac{1}{3600} \cdot 300 =$ دوران در یک ثانیه

$\frac{\pi^R}{6} = 2\pi^R \cdot \frac{1}{12} =$ در یک ثانیه زاویه طی شده

$$1 \longrightarrow 2\pi^R$$

$$\frac{1}{12} \longrightarrow x$$

در یک ثانیه $\frac{\pi}{6}$ رادیان یا 30° قوس را می پیماید.

11- زوایای یک مثلث به ترتیب $4x$ درجه $\frac{70x}{9}$ گراد و $\frac{\pi x}{20}$ رادیان میباشد. هریک این زاویه چند درجه می باشد؟

حل:

$$4x^\circ + (\frac{70x}{9} \cdot \frac{9}{10})^\circ + (\frac{\pi x}{20} \cdot \frac{180}{\pi})^\circ = 180^\circ$$

$$4x + 7x + 9x = 180^\circ$$

$$20x = 180^\circ$$

$$x = 9^\circ$$

پس زاویا عبارت اند از: $36^\circ + 63^\circ + 81^\circ = 180^\circ$

$$4 \cdot 9 = 36^\circ$$

$$7 \cdot 9 = 63^\circ$$

$$9 \cdot 9 = 81^\circ$$

12- A , B , C, D زوایایی یک چهار ضلعی میباشند اگر $\hat{A} + \hat{D} = 240^\circ$ و $\hat{C} + \hat{D} = 200g$ و $\hat{B} + \hat{D} = \frac{2\pi^R}{3}$ باشد

اندازۀ زوایای این چهار ضلعی را بر حسب درجه بدست آورید.

حل: چون $200^g = 180^\circ$ و $\frac{2\pi^R}{3} = 120^\circ$ پس:

$$\hat{A} + \hat{D} = 240^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = (200 \cdot \frac{9}{10})^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = (\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi})^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$$

$$\hat{A}=240-D$$

$$\hat{B}=120-D$$

$$C=1\hat{8}0-D$$

همچنان:

$$(240-D)+(120-D)+(180-D)+D=360^\circ$$

$$-2D+540=360 \Rightarrow 2D=180^\circ$$

$$\hat{D}=90^\circ$$

$$\hat{A}=240^\circ-90^\circ=150^\circ$$

$$\hat{B}=120^\circ-90^\circ=30^\circ$$

$$\hat{C}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

13- $\frac{1}{12}$ حصه یک دوران مکمل مساوی است به:

$a=30°$ $\quad b: \frac{\pi}{6}$ *radian* $\quad c: \frac{100}{3}g$ $\quad d:$ هرسه درست اند

حل:

$$\frac{1}{12}\cdot 2\pi^R=\frac{\pi^R}{6}=30^\circ=(\frac{100}{3})^g$$

حل: جزء d درست میباشد.

14- مجموعۀ دو زاویۀ 17° و تفاضل آنها 17g است مقدار این دو زاویه را دریابید.

$$\hat{A}+\hat{B}=17^\circ \ldots \text{ I}$$

$$\hat{A}-\hat{B}=15.3^\circ \ldots \text{ II} \qquad 17g(\frac{9}{10})=\frac{153}{10}=15.3^\circ$$

$$2A=32.3 \qquad A=\frac{32.3}{2}=(16.15)^\circ=16^\circ \quad 9'$$

$$\hat{B}=17^\circ-16.15^\circ=0.85^\circ=51'$$

15- برحسب درجه مجموع دو زاویه x و تفاضل آنها برحسب گراد نیز x می باشد مقدار این دو زاویه را دریابید.

حل:

$$A+B=x^\circ$$

$$A-B=(\frac{9}{10}x)^\circ$$

$$2A=\frac{19x}{10}$$

$$A=(\frac{19x}{20})^\circ$$

$$(\frac{19x}{20})^\circ+B=x^\circ$$

$$B=x-\frac{19x^\circ}{20}=\frac{x^\circ}{20}$$

16- اندازۀ زوایای زیر را به شکل اعشاری درجه بنویسید.

$47^\circ\ 15'\ 36''$ $\qquad$ $15^\circ\ 24'\ 45'$

حل:

$$47^\circ\ 15'\ 36''=47^\circ+(\frac{15}{60})^\circ+(\frac{36}{3600})^\circ=47^\circ+(0.25)^\circ+0.01=47^\circ.26^\circ$$

$$15^\circ\ 24'\ 45'=15^\circ+(\frac{24}{60})^\circ+(\frac{45}{3600})^\circ=15^\circ+(0.4)^\circ+0.0125=(15.4125)^\circ$$

17- اندازهٔ زوایای زیر را به درجه، دقیقه و ثانیه (D.M.S) تبدیل کنید.

حل:

23.16° $\qquad$ 4.2075°

$$23.16^\circ=23^\circ+(0.16\cdot 60)'=23^\circ+(9.60)'=23^\circ+9'+(0.6\cdot 60)''=23^\circ\ 9'\ 36''$$

$$4.2075^\circ=4^\circ+(0.2045\cdot 60)'=4^\circ+12'+(0.27\cdot 60)''=4^\circ\ 12'\ 16.2''$$

18- نسبت های مثلثاتی $\sin(-\frac{\pi}{3})$, $\tan\frac{3\pi}{4}$ و $\cot\frac{7\pi}{6}$ را دریابید.

حل:

$$\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{3\pi}{4})=\tan(3\cdot 45)^\circ=\tan(135^\circ)=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$$

یا

$$\tan(\frac{3\pi}{4})=\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cot(\frac{7\pi}{6})=\cot(7\cdot 30)^\circ=\cot(210^\circ)=\cot(180^\circ+30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

یا

$$\cot(\frac{7\pi}{6})=\cot(\pi+\frac{\pi}{6})=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

19- در انتروال $[-2\pi.2\pi]$ به کدام قیمت های θ, $\sin\theta=1$ می باشد؟

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

20 در انتروال $[-2\pi,2\pi]$ تابع $\tan\theta$ به کدام قیمت های θ مجانب عمودی دارد؟

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

حل: در قیمت های که $\cos\theta=0$ باشد تابع $\tan\theta$ دارای مجانب عمودی می باشد.

$$\cos(-\frac{3\pi}{2})=0\ ,\ \cos(-\frac{\pi}{2})=0\ \ ,\ \cos\frac{\pi}{2}=0\ \ ,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0$$

در انتروال $[-2\pi,2\pi]$ به قیمت های $-\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ تابع $\tan\theta$ دارای مجانب های عمودی می باشد.

21- از $(i)-(iii)$ کدام رابطه درست نیست؟

$(i)\ \sin(-x)=-\sin x$ $\qquad$ $(ii)\ \cos(-x)=-\cos x$ $\qquad$ $(iii)\ \tan(-x)=-\tan x$

$a)$ (i)و (ii) درست است.

$b)$ فقط ii درست است.

$c)$ (i)و iii درست است.

$d)$ هر سه درست است.

$e)$ هیچکدام درست نیست.

حل: جزء (c) درست است.

22- $\sin(-13\pi), \cos\frac{47\pi}{2}$ و $\tan\frac{8\pi}{3}$ را معلوم کنید.

حل:

$$\cos\frac{47\pi}{2} = \cos(11\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$
$$\sin(-13\pi) = -\sin 13\pi = -\sin(6\cdot 2\pi + \pi) = \sin\pi = 0$$
$$\tan\frac{8\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \tan\frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

23- زاویهٔ را در یابید که اگر از اندازهٔ آن برحسب گراد 23 و احدکم کنیم اندازهٔ آن برحسب درجه به دست آید.

حل: $\frac{10}{9}\mathrm{D} - 23 = \mathrm{D} \Rightarrow 10\mathrm{D} - 207 = 9\mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{D} = 207^\circ = (207+23)^g = 230^g = 207^\circ$

24- مجموع سه زاویه 240 گراد است اگر زاویهٔ اولی 40 گراد و دومی $\frac{3\pi}{4}$ رادیان باشد زاویهٔ سومی چند درجه است؟

حل:

$$(40\cdot\frac{9}{10})^\circ + (\frac{3\pi^R}{4}\cdot\frac{180}{\pi})^\circ + x^\circ = (240\cdot\frac{9}{10})^\circ$$
$$36^\circ + 135^\circ + x^\circ = 216^\circ$$
$$171^\circ + x^\circ = 216^\circ$$
$$x^\circ = 216^\circ - 171^\circ = 45^\circ$$

زاویهٔ سومی 50 گراد میباشد که اگر به درجه تبدیل شود: $50^g\cdot\frac{9}{10} = 45^\circ$ میشود.

25- نسبت های مثلثاتی 4185° را دریابید.

حل:

$$\sin 4185^\circ = \sin(11\cdot 360 + 225) = \sin 225 = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 4185^\circ = \cos(11\cdot 360 + 225) = \cos 225 = \cos(180 + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 4185 = \mathrm{tg}45^\circ = 1$$
$$\sec 4185 = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$
$$\cot 4185 = \cot 45^\circ = 1$$
$$\csc 4185 = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

26- نسبت های مثلثاتی (-3660°) را دریابید.

حل:

$$\sin(-3660^\circ) = -\sin 3660^\circ = -\sin(10\cdot 360 + 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-3660) = \cos 3660 = \cos(10\cdot 360 + 60) = \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-3660) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

$$\cot(-3660) = -\cot 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec(-3660) = \sec 60 = 2$$

$$\csc(-3660) = -\csc 60 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

27- تابع $y=\cos\theta$ در انتروال $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$:

$a)$ متزاید است　　$b)$ متناقص است　　$c)$ نه متزاید است و نه متناقص

حل: متزاید میباشد (جزء a درست است).

28- پریود تابع $y=\tan\theta$ عبارت است از:

a) 2π　　b) π　　c) $\frac{\pi}{2}$　　d) $\frac{3\pi}{2}$

حل: پریود تابع $y=\tan\theta$ عبارت از π می باشد (جزء b جواب می باشد).

29- تابع $F(t)=\cot(t)$ یک تابع :

a) جفت است　　b) طاق است　　c) نه جفت و نه طاق است

حل: تابع $f(t)=\cot(t)$ یک تابع طاق میباشد (جواب درست جزء b می باشد).

30- تابع که گراف آن نظر به مبدأ متناظر باشد عبارت از تابع:

a) جفت است　　b) طاق است　　c) نه جفت است و نه طاق

حل: تابعی که گراف آن نظر به مبدأ متناظر باشد عبارت از تابع طاق میباشد جزء b درست است.

31- دورهٔ تناوب $y=\cos\theta$ مساوی است به:

$a)$ π　　$b)$ $\frac{3\pi}{2}$　　$c)$ 2π　　$d)$ 3π

حل: 2π جواب c درست است.

32- $\sin 67^\circ$ با $\sin 787^\circ$ چه رابطه دارد؟

$a)$ $\sin 787^\circ > \sin 67^\circ$　　$b)$ $\sin 787^\circ < \sin 67^\circ$　　$c)$ $\sin 67^\circ = \sin 787^\circ$

حل:

$$\sin 787^\circ = \sin(2\cdot 360 + 67) = \sin 67^\circ$$

با هم مساوی اند جواب c درست است.

33- کدام یک از تساوی های زیر درست است؟

$a)\ \sec 135^\circ = -\csc 45^\circ$ $\qquad b)\ \sec 135^\circ = \csc 40^\circ$

$d)\ \sec 135^\circ = -\sec 45^\circ$ $\qquad c)\ \sec 135^\circ = -\sec 45^\circ$

حل: جواب درست جزء c می باشد.

34- کدام یک از تساوی های زیر درست است؟

$a)\ \tan 240^\circ = \tan 60$ $\qquad b)\ \tan 240^\circ = -\tan 60^\circ$

$c)\ \tan 240^\circ = \cot 60^\circ$ $\qquad d)\ \tan 240^\circ = -\cot 60^\circ$

حل: جزء a درست است.

35- $\cot 0^\circ = ?$

$a)\ 1$ $\qquad b)\ -1$ $\qquad c)\ 0$ $\qquad d)$ تعریف نشده است

حل: تعریف نشده است d درست است.

36- $\cos 9\pi = ?$

$a)\ 1$ $\qquad b)\ -1$ $\qquad c)\ 0$ $\qquad d)\ \frac{1}{2}$

حل: 1- جواب b درست است.

37- $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $\qquad b)\ -1$ $\qquad c)\ 0$ $\qquad d)$ هر سه درست نیست

حل:

$$\sin(-\frac{13\pi}{2}) = -\sin\frac{13\pi}{2} = -\sin\left(3\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

(جزء b درست است).

38 - نسبت های مثلثاتی زوایهٔ -2430° را دریابید.

حل:

$$\sin\left(-2430^\circ\right) = -\sin 2430^\circ = -\sin(6\cdot 360 + 270)^\circ = -\sin 270 = 1$$
$$\cos\left(-2430^\circ\right) = \cos 2430^\circ = \cos(6\cdot 360 + 270)^\circ = \cos 270 = 0$$

$\tan(-2430^\circ)$ (غیر معین)

$\cot(-2430^\circ) = 0$

$\sec(-2430^\circ)$ (غیر معین)

$\csc(-22430^\circ) = 1$

39- $\sin(270^\circ - \theta) = ?$

$a)\ \sin\theta$ $\qquad b)\ -\sin\theta$ $\qquad c)\ \cos\theta$ $\qquad d)\ -\cos\theta$

حل: $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$ جواب جزء d درست میباشد.

سؤال 40

$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)\,1$ $\quad b)\,-1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف نشده

حل:

$$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

جواب جزء b درست است.

41- $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)\,1$ $\quad b)\,-1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف نشده

حل:

$$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = \frac{1}{\cos(-\frac{9\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(\frac{9\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

تعریف نشده است پس جزء d درست میباشد.

42- $\tan(-15\pi) = ?$

$a)\,1$ $\quad b)\,-1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف نشده

حل:

$$\tan(-15\pi) = -\tan 15\pi = \tan(7\cdot 2\pi + \pi) = \tan\pi = 0$$

جواب: جزء c درست است.

43- $\sec(-1530^\circ) = ?$

$a)\,1$ $\quad b)\,-1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف نشده

حل: $\sec(-1530) = \sec(4\cdot 360 + 90) = \sec 90$ (تعریف نشده)

44- $\cot(-2430^\circ) = ?$

$a)\,1$ $\quad b)\,-1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف نشده

حل:

$$\cot(-2430^\circ) = -\cot 2430 = -\cot(6\cdot 360 + 270) = -\cot 270 = -\cot(180+90) = -\cot 90 = 0$$

جواب: جزء c درست است.

45- $Sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\,1$ $\quad b)\,-1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف نشده

حل:

$$Sin\frac{235\pi}{2} = (58\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = Sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

جواب جزء b درست است.

46- $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1　　b) 0　　c) -1　　d) تعریف نشده

حل:

$$\cos(\frac{407\pi}{2}) = \cos(203\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

یا

$$\cos(\frac{407\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

جواب جزء b درست است.

47- $\tan(90^\circ + \theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$　　$b) -\cot\theta$　　$c) -\tan\theta$　　$d) \tan\theta$

حل:

$$\tan(90^\circ + \theta) = \tan(90^\circ - (-\theta)) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

جواب جزء b درست است.

48- $\tan(270^\circ + \theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$　　$b)\ -\cot\theta$　　$c)\ \tan\theta$　　$d) -\tan\theta$

حل:

$$\tan(270^\circ + \theta) = \frac{Sin(270^\circ + \theta)}{Cos(270^\circ + \theta)} = \frac{-Cos\theta}{Sin\theta} = -\cot\theta$$

جواب جزء b درست است.

49- $Sin(-1980) = ?$

$a)\ 1$　　$b)\ -1$　　$c)\ 0$　　$d)\ \frac{1}{2}$

حل: $Sin(-1980)^\circ = -\sin(1980^\circ) = -\sin(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0$

جواب جزء c درست است.

50- $Sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$　　$b)\ -1$　　$c)\ 0$　　$d)\ \frac{1}{2}$

حل:

$Sin(-\frac{3\pi}{2}) = 1$ (جواب جزء a درست است).

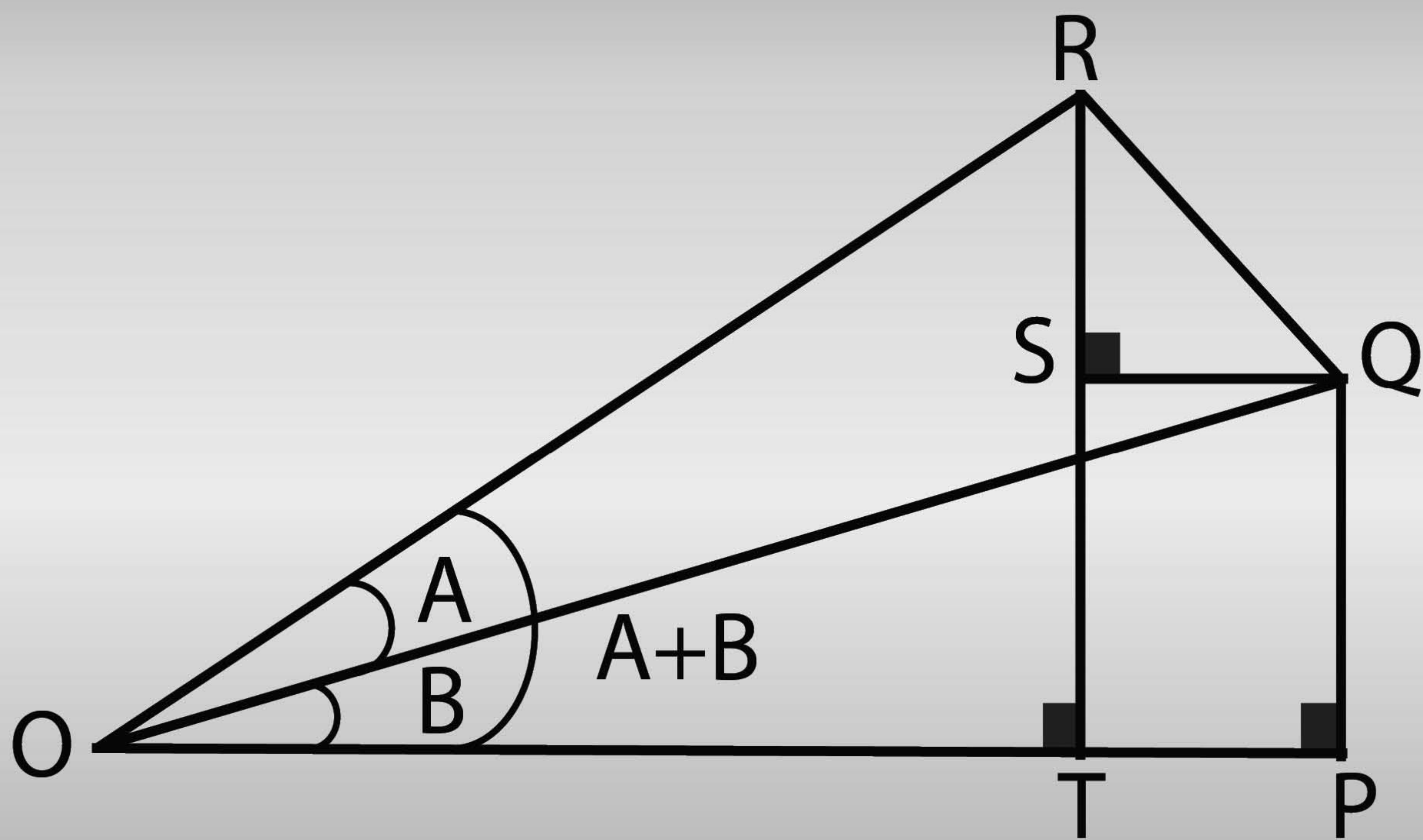
51- کدام یک از رابطه های زیر درست است؟

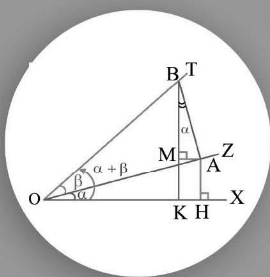
$a)\quad Sin\frac{3\pi}{4} = Sin\frac{\pi}{4}$　　$b)\quad Sin\frac{3\pi}{4} > Sin\frac{\pi}{4}$　　$c)\quad Sin\frac{3\pi}{4} < Sin\frac{\pi}{4}$

حل: جزء a صحت دارد؛ زیرا که:

$$Sin\frac{3\pi}{4} = Sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

فصل پنجم
تطبیقات مثلثات


R
S
Q
A
B
A+B
O
T
P



فورمول های جمع و تفاضل

صفحۀ کتاب: (223)   وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه را بیآموزند. • از روی نسبت های مثلثاتی دو زاویه، نسبت ها مثلثاتی مجموع و تفاضل این دو زاویه را دریافت کرده بتوانند. • تفاوت بین نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه را درک کنند. • در حل مسایل مثلثاتی اهمیت این فورمول ها را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه و مناقشه، کار های گروپی و انفرادی...
مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت...
مواد درسی توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام دادن فعالیت های مقدماتی غرض خلق انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. چون این رابطه درست می باشد و بعد از ثبوت آن شاگردان درست بودن این رابطه را درک می کنند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه:

در صورتیکه چارت شکل ورودی این درس موجود باشد، استاد محترم فورمول های $\sin(\propto+B)$، $\cos(\propto+B)$ و $\tan(\propto+B)$، را ثبوت کند.

بعد مثال صفحه(225) را باسهم گیری شاگردان حل کند.

استاد محترم فورمول های نسبت های مثلثاتی زاویۀ $(\propto -\text{B})$ را به دست آورد وشاگردان فعالیت صفحه(226) را اجرا کنند.

مثال های اول، دوم، سوم و چهارم را باسهم گیری شاگردان حل کنید و شاگردان فعالیت صفحه(227) را اجرا کنند.

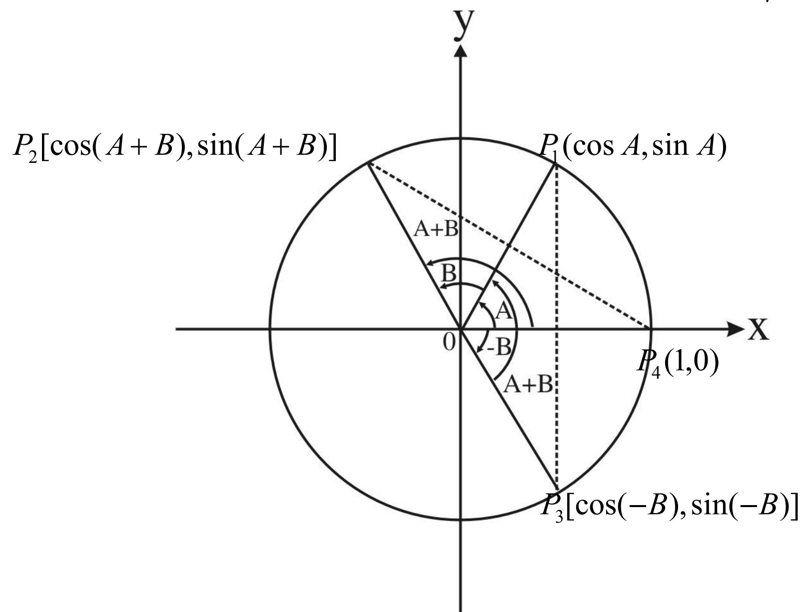
تحکیم درس: (7) دقیقه:

غرض تحکیم درس سؤال اول تمرین حل شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه:

سؤال سوم تمرین این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم



$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

برروی دایره مثلثاتی (O,R)، زوایایی A, $A+B$ و $-B$ را تعین می کنیم، اضلاع این زوایا محیط دایـره را در نقـاط p_1, p_2, p_3 و p_4 قطع می کند.

$\cos A = x_1 \qquad \sin A = y_1$

$p_1(x_1, y_1) = p_1(\cos A, \sin)$

چون مثلث های P_1OP_3 و P_4OP_2 باهم انطباق پذیر اند پس $\overline{p_4p_2} = \overline{p_1p_3}$

$(\overline{p_1p_3})^2 = [\cos A - \cos(-B)]^2 + [\sin A - \sin(-B)]^2$

$(p_1p_3)^2 = [\cos A - \cos B]^2 + [\sin A + \sin B]^2$

$(p_1p_3)^2 = \cos^2 A - 2\cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B$

$\overline{(p_1p_3)}^2 = 2 - 2\cos A \cos B + 2 \sin A \sin B$

همچنین

$(\overline{p_2p_4})^2 = [\cos(A+B) - 1]^2 + [\sin(A+B) - o]^2$

$(\overline{p_2p_4})^2 = 1 + 1 - 2\cos(A+B) = 2 - 2\cos(A+B)$

چون: $(\overline{p_3p_1})^2 = (\overline{p_4p_2})^2$ می باشد داریم که:

$2 - 2\cos A \cos B + 2\sin A \sin B = 2 - 2\cos(A+B)$

در نتیجه:

$\boxed{\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$

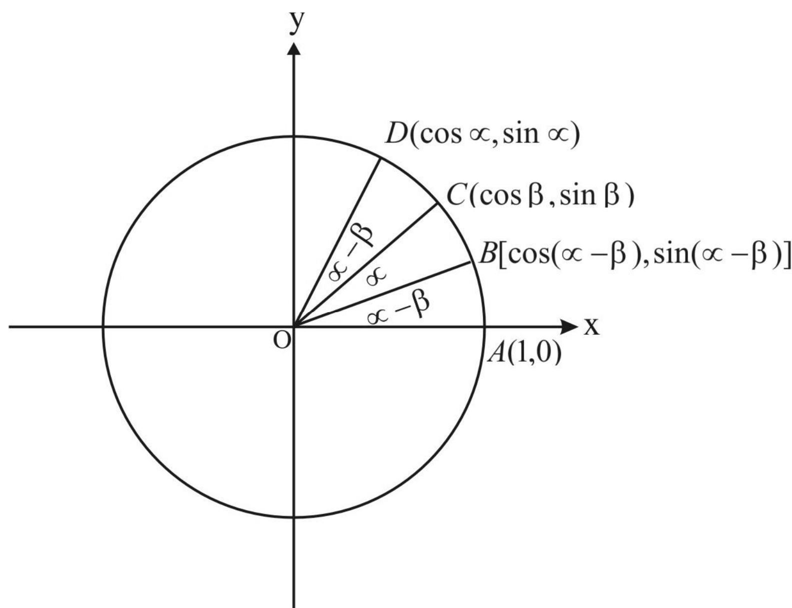
$\cos[A + (-B)] = \cos A \cos(-B) - \sin(A)\sin(-B)$

$\boxed{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$

$\sin(A+B) = \cos[90^\circ - (A+B)] = \cos[(90^\circ - A) - B]$

$$\sin(A+B)=\cos(90^\circ-A)\cos B+\sin(90^\circ-A)\sin B$$
$$\cos(90-A)=\sin A$$
$$\sin(90-A)=\cos A$$
$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

یا به طریق دیگر: نقاط C, B, A و D را روی محیط دایره مثلثاتی که مرکز آن O است در نظر میگیریم:



طوریکه طول قوس AB با طول قوس CD مساوی باشد، از هندسه میدانیم وقتی که دو قوس در یک دایره با هم منطبق باشند $(AB\cong CD)$ وتر های مربوطه آن ها نیز باهم انطباق پذیر می باشند طول وتر AB مساوی با طول وتر CD می باشد $|AB|=|CD|$ اگر $A\hat{O}D=\alpha$ و $A\hat{O}C=\beta$ باشد؛ پس، $C\hat{O}D=\alpha-\beta$ می شود. چون $|AB|=|CD|$ است؛ پس $C\hat{O}D=A\hat{O}B$ پس $A\hat{O}B=\alpha-\beta$ است. کمیات وضیعه C, B, A و D عبارت اند از: $(1,0)$، $[\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)]$ ، $(\cos\beta, \sin\beta)$، و $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

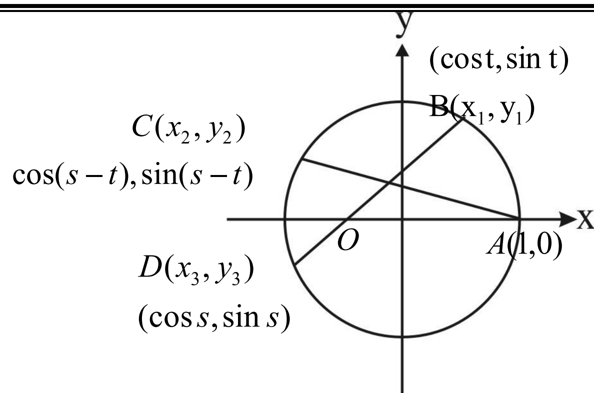
چون $|AB|^2=|CD|^2$ می باشد.

از فورمول فاصله داریم که:

$$[(1-\cos(\alpha-\beta)]^2+[0-\sin(\alpha-\beta)]^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$2-2\cos(\alpha-\beta)=1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

فورمول های مجموع و تفاضل دو زاویه (Sum and Difference Identities)

طوری که s و t دو زاویه باشد؛ مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی این دو زاویه را این طور نیز به دست آورده می توانیم:



اگر بالای محیط دایرهٔ مثلثاتی نقاط $C(x_2,y_2), B(x_1,y_1), A(1,0)$ و $D(x_3,y_3)$ واقع باشند طوری که اگر طول قوس $AB = t$, $AD = s$ و $AC = s - t$ باشد و فرض می شود که $0 < t < s < 2\pi$ است، قوس BD مساوی به طول s-t می باشد $(AC = BD)$

چون طول قوس ها با هم مساوی می باشند پس، طول قطعه خط های AC و BD با هم مساوی می باشند به اساس فورمول فاصله داریم که:

$$\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$$

هر دو طرف را مربع می کنیم، داریم که:

$$x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 = x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

چون نقاط C,B و D روی محیط دایره مثلثاتی قرار دارند، پس:

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad , \quad x_2^2 + y_2^2 = 1 \;, \quad x_3^2 + y_3^2 = 1$$

این قیمت ها را در معادله(I) وضع می کنیم داریم که:

$$2 - 2x_2 = 2 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$$

یا

$$x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$$

چون $x_2 = \cos(s-t)$ و $x_3 = \cos(s)$, $x_1 = \cos(t)$, $y_3 = \sin(s)$, $y_1 = \sin(t)$

در نتیجه داریم که:

$$\boxed{\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t}$$

$$\cos(s+t) = \cos[s-(-t)] = \cos s \cos(-t) \sin s \sin(-t)$$

چون $\cos(-t) = \cos t$ و $\sin(-t) = -\sin t$ می باشد.

پس:

$$\boxed{\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t}$$

به همین ترتیب

$$\sin(s+t) = \cos[\frac{\pi}{2} - (s+t)] = \cos[(\frac{\pi}{2} - s) - t]$$

$$\sin(s+t) = \cos(\frac{\pi}{2} - s) \cdot \cos t + \sin(\frac{\pi}{2} - s) \cdot \sin t$$

$$\boxed{\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t}$$

اگر $\sin(s-t)$ را به شکل $\sin[s+(-t)]$ بنویسیم از فرمول $\sin(s+t)$ داریم که:

$\sin(s-t)=\sin s\cos t-\cos s\sin t$

چون $\tan(s+t)=\dfrac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)}$ می باشد.

بعد از تعویض قیمت های $\sin(s+t)$ و $\cos(s+t)$ داریم که:

$$\tan(s+t)=\frac{\tan s+\tan t}{1-\tan s\tan t}$$

$$\tan(s-t)=\frac{\tan s-\tan t}{1+\tan s\tan t}$$

•

$$\frac{\cos 11^\circ+\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ-\sin 11^\circ}=\tan 56^\circ$$

$$\tan 56^\circ=\tan(45^\circ+11^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 11^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 11^\circ}=\frac{1+\tan 11^\circ}{1-\tan 11^\circ}=\frac{1+\frac{\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ}}{1-\frac{\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ}}=\frac{\cos 11^\circ+\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ-\sin 11^\circ}$$

• اگر $\propto,\beta$ و γ سه زاویه مثلث ABC باشند.

$$\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\propto}{2}=1$$

$$(\propto+\beta+\gamma=180\ )$$

$$\propto+\beta=180-\gamma$$

$$\frac{\propto}{2}+\frac{\beta}{2}=(90-\frac{\gamma}{2})$$

$$\tan(\frac{\propto}{2}+\frac{\beta}{2})=\frac{\tan\frac{\propto}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}=\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\propto}{2}=1$$

• محاسبه کردن $\cot(\propto+\beta)$:

$$\cot(\propto+\beta)=\frac{1}{\tan(\propto+\beta)}=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{\cot\alpha}\cdot\frac{1}{\cot\beta}}{\frac{1}{\cot\alpha}+\frac{1}{\cot\beta}}=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

• اگر A،B و C زاویه های یک مثلث باشند؛ پس:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A=\pi-(\hat{B}+\hat{C})$$

$$\tan A=\tan[\pi-(\hat{B}+\hat{C})]=-\tan(\hat{B}+\hat{C})=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}$$

$$\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

- اگر $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ و $\cos\beta=\frac{12}{13}$ و α در ربع سوم و β در ربع چهارم واقع باشد:

$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{33}{65}$ $\qquad$ $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{63}{65}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$ $\qquad$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{63}{16}$

- اگر $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ و $\cos\beta=-\frac{8}{17}$ و α و β در ربع سوم قرار داشته باشد:

$\sin(\alpha+\beta)=1$ $\qquad$ $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{161}{289}$

$\tan(\alpha+\beta)=(\text{undifend})$ $\qquad$ $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{161}{240}$

- اگر $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ و $\sin\beta=-\frac{1}{3}$ باشد:

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{-2\sqrt{10}+2}{9}$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta)=\frac{-2\sqrt{10}-2}{9}$

- اگر $\sin A=-\frac{4}{5}$ و $\sin B=\frac{12}{13}$ باشد:

$\cos(A+B)=\frac{56}{65}$ $\qquad$ $\cos(A-B)=\frac{16}{65}$

- اگر $\sin\theta=-\frac{8}{17}$ و $\cos\gamma=-\frac{8}{17}$ باشد:

$\cos(\theta+\gamma)=0$ $\qquad$ $\cos(\theta-\gamma)=\frac{240}{289}$

- اگر $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$ و $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ باشد:

α و β در ربع سوم واقع اند.

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{77}{85}$ $\qquad$ $\sin(\alpha-\beta)=\frac{13}{85}$

$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{77}{36}$ $\qquad$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{13}{84}$

حل تمرین:

1- نشان دهید که :

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

حل:

$$\tan(45^\circ-\theta)=\frac{\tan 45^\circ-\tan\theta}{1+\tan 45^\circ\cdot\tan\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- نشان دهید که:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\,\sin\beta$$

حل:

$a)\quad (\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha)+(\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$b)\quad (\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

3- $\cos 277^\circ\cos 97^\circ+\sin 277^\circ\sin 97^\circ=?$

a) -1　　b) 1　　c) 0　　d) $\frac{1}{2}$

حل:

$\cos 277^\circ\cos 97^\circ+\sin 277^\circ\cdot\sin 97^\circ=\cos(227^\circ-97^\circ)=\cos(180^\circ)=-1$

جزء a درست است.

4- توسط فورمول های جمع ، $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ و $\tan 240^\circ$ را دریابید.

حل:

$a)\quad \sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=\sin 180^\circ\cdot\cos 60^\circ+\cos 180^\circ\cdot\sin 60^\circ=0\cdot\frac{1}{2}+(-1)\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b)\quad \cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=\cos 180^\circ\cdot\cos 60^\circ-\sin 180^\circ\cdot\sin 60^\circ=(-1)(\frac{1}{2})-0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$

$c)\quad \tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\frac{\tan 180^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 180^\circ\cdot\tan 60^\circ}=\frac{0+\sqrt{3}}{1-0\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

5- توسط فورمول های جمع و تفاضل نشان دهید که $\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ می باشد.

حل:

$\frac{1}{2}[(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)+(\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y)]=\frac{1}{2}\cdot 2\cos x\cdot\cos y=\cos x\cdot\cos y$

6- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 210° را توسط فورمول های جمع دریابید.

$a:\quad \sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=\sin 180^\circ\cos 30^\circ+\cos 180^\circ\cdot\sin 30^\circ=(0)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$b:\quad \cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=\cos 180^\circ\cos 30^\circ-\sin 180^\circ\cdot\sin 30^\circ=(-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-0\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c:\quad \tan 210^\circ=\tan(180^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 180^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 180^\circ\cdot\tan 30^\circ}=\frac{0+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-0\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

سه نسبت باقیمانده ($\sec 210^\circ$, $\csc 210^\circ$ و $\cot 210^\circ$) را می توان به همین ترتیب به آسانی دریافت کرد.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ و $\tan 105^\circ$ را دریابید. $(105^\circ=60^\circ+45^\circ)$

حل:

a) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

b) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$$

یا

$$\cos 105^\circ = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

c) $\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

8- اگر $\sin x = -\frac{3}{4}$ و $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ باشد $\cos(\frac{\pi}{4} + x)$ را دریابید.

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{3}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+3)}{8}$$

9- نشان دهید که: $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\cos\beta$ می باشد.

$$(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) - (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$$

10-

$\sin 2^\circ \cos 88^\circ + \cos 2^\circ \sin 88^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$\sin = 90^\circ = 1$ جواب b درست است.

$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$

$\cos^2 x-\sin^2 x=?$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 2α از جنس نسبت های مثلثاتی α

صفحهٔ کتاب: (229) **وقت تدریس:** (2 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان در اخیر این درس باید:
• طریق به دست آوردن نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه از جنس نسبت های مثلثاتی زاویه را بیآموزند.
• طریق به دست آوردن نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس نسبت مثلثاتی نصف تانجات همان زاویه را بیآموزند.
• طریق به دست آوردن نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس نسبت های مثلثاتی دوچند زاویه را بیآموزند.
• نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه را از جنس نسبت های مثلثاتی زاویه دریافت کرده بتوانند.
• نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس تانجانت نصف زاویه را دریافت کرده بتوانند.
• در حل مسایل مثلثاتی از این ارتباطات استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، مباحثه و مناقشه، کار های گروپی و انفرادی و...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت و...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از انجام دادن فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی غرض خلق انگیزه از شاگردان پرسیده شود.
$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=\sin\frac{2x}{3}$
$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس (28) دقیقه:
استاد محترم با سهم گیری شاگردان فرمول های $\cos 2x, \sin 2x$، و $\tan 2x$ را ثبوت نموده مثال اول را حل کند.شاگردان فعالیت صفحه(230) این درس را اجرا کنند که جواب فعالیت طور زیر می باشد:
حل قسمت اول:</td></tr>
</table>

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})}{(\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{24}{7}$

جواب قسمت دوم:

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$

$\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{5}{13}$ (ضلع دوم β در ربع دوم قرار دارد)

$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2(\frac{12}{13})(-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169}$

مثال دوم و سوم را استاد محترم حل کند وفعالیت صفحه(231) را شاگردان در گروپ ها کار کنند. بعد نسبت های مثلثاتی θ از جنس $(\tan\frac{\theta}{2})$ را به دست آورده، به دست آوردن نسبت های مثلثاتی زاویه θ از جنس 2θ ثبوت گردد و مثال های اول و دوم صفحه(233) این درس با سهم گیری شاگردان حل شود. و فعالیت صفحه(234) را شاگردان اجر کنند مثال های سوم و چهارم را استاد محترم حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

نسبت های مثلثاتی زاویه 90° را از جنس نسبت های مثلثاتی 45° دریابید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

$\cos\frac{\pi}{12}$ را از جنس $\cos\frac{\pi}{6}$ به دست آورید.

معلومات اضافی برای معلم

نسبت های مثلثاتی $2\propto$ (Multiple – Angle Identities)

1- اگر $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ باشد، نسبت های مثلثاتی θ در صورتی که ضلع دوم زاویه θ در ربع دوم واقع باشد عبارت اند از:

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\frac{4}{5} = 1 - 2\sin^2\theta$

$-\frac{1}{5} = -2\sin^2\theta$

$\frac{1}{10} = \sin^2\theta$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = \frac{9}{10}$

$\cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{3}$ $\qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{10}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{-\sqrt{10}}{3}$ $\qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -3$

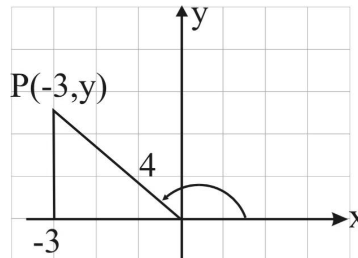
2- اگر $\cos\theta = \frac{3}{5}$ باشد و $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ قرار داشته باشد $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ و $\tan 2\theta$ قرار زیر می باشند.

چون $\cos\theta = \frac{3}{5}$ می باشد در نتیجه $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ میشود.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(-\frac{4}{5})(\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$ $\qquad \cos 2\theta = \cos^2 - \sin^2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$

$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$ یا $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(-\frac{4}{3})}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{-8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{7}$

3- اگر $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ و $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ باشد $\cos 2\theta$ عبارت است از:



$x^2 + y^2 = r^2$

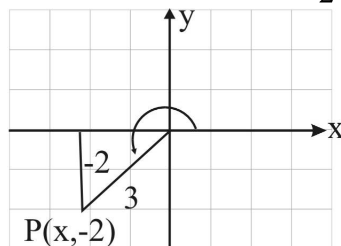
$(-3)^2 + y^2 = 4^2$

$y = \sqrt{7}$ (در ربع دوم قیمت y مثبت می باشد)

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$

اگر $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ و $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ باشد قیمت $\cos\frac{\theta}{2}$ عبارت است از:



$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + (-2)^2 = 3^2$

$x = -\sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

چون $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ می باشد پس $90^\circ \le \frac{\theta}{2} \le 135^\circ$ است، در نتیجه علامه $\cos\frac{\theta}{2}$ منفی می باشد.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+(-\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

4- شما می توانید جواب های داده شده زیر را به دست اورید.

- اگر $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ باشد، $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ و $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ می باشد.
- اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ باشد، $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ و $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ می باشد.
- اگر $\cos\theta = \frac{2}{5}$ و $270^\circ \le \theta \le 360^\circ$ باشد، $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{21}}{25}$ و $\cos 2\theta = -\frac{17}{25}$ می باشد.

- اگر $\sin\theta=-\frac{2}{5}$ و $270^\circ\le\theta\le360^\circ$ باشد، $\sin 2\theta=-\frac{4\sqrt{21}}{25}$ و $\cos 2\theta=\frac{17}{25}$ می باشد.

- اگر $\sin\theta=\frac{1}{4}$ و $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ باشد، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$ و $\cos 2\theta=\frac{7}{8}$ می باشد.

- اگر $\cos\theta=\frac{1}{4}$ و $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ باشد، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$ و $\cos 2\theta=-\frac{7}{8}$ می باشد.

- اگر $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{4}$ و $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ باشد، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{55}}{8}$ و $\cos 2\theta=\frac{3}{8}$ می باشد.

- اگر $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{4}$ و $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ باشد، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{55}}{8}$ و $\cos 2\theta=-\frac{3}{8}$ می باشد.

- اگر $\sin\theta=\frac{1}{5}$ و $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ باشد، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{5}}$ و $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{5}}$ می باشد.

- اگر $\cos\theta=\frac{1}{5}$ و $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ باشد، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{5}}$ و $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3}{5}}$ می باشد.

- اگر $\cos\theta=-\frac{5}{6}$ و $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ باشد، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{11}{12}}$ و $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{12}}$ می باشد.

- اگر $\sin\theta=\frac{5}{6}$ و $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ باشد، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{11}{12}}$ و $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{11}{12}}$ می باشد.

- اگر $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ باشد، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}$ و $\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ می باشد.

اگر $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ باشد، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$ و $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}$ می باشد.

5- واضح است که:

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta \qquad \frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\sin\theta \qquad \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos-\sin\theta}=\cos\theta \qquad \sin^2 2\theta=4\sin^2\theta\cos^2 \qquad 2\cos^2-\sin^2\theta=\cos^2\theta+\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$$

6- با استفاده از فرمول دو چند نسبت های مثلثاتی $\cos\frac{2\pi}{3}$ قرار زیر به دست می آید:

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}=(\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

7- نسبت های مثلثاتی نصف یک زاویه از جنس نسبت های مثلثاتی این زاویه:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

به همین ترتیب شما می توانید جواب های داده شده را به دست آورید.

$$\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \tan\frac{7\pi}{8}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$$

8- اگر $\cos\theta=\frac{2}{3}$ و $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ باشد $\cos\frac{\theta}{2},\tan\frac{\theta}{2}$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ عبارت اند از:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{6}\qquad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{-\frac{\sqrt{30}}{6}}=\frac{-\sqrt{5}}{5}$$

9- نشان داده می توانیم که $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ می باشد و به کمک آن $\tan 22.5^\circ$ طور زیر به دست آورده می توانیم:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\tan 22.5^\circ=\frac{\sin 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}-1$$

جواب به سؤال های تمرین

1- نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 240° را ازجنس نسبت های مثلثاتی زاویهٔ 120° دریابید.

حل:

$$\sin 240^\circ=2\sin 120^\circ\cdot\cos 120^\circ=2(\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(\frac{-1}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos^2 120^\circ-\sin^2 120^\circ=(-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ=\frac{2\tan 120^\circ}{1-\tan^2 120^\circ}=\frac{2(-\sqrt{3})}{1-3}=\sqrt{3}$$

2- اگر $\sin\theta=\frac{3}{5}$ باشد و ضلع دوم θ در ربع اول باشد $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ را دریابید.

حل:

(ضلع دوم θ در ربع اول واقع است).

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\frac{4}{5})^2-(\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}=\frac{24}{7}$$

3- اگر $\sin\theta=\frac{4}{5}$ باشد و ضلع دوم θ در ربع دوم باشد $\cos\theta/2$ را دریابید.

حل: در ربع دوم $\cos\theta<0$ می باشد. اول $\cos\theta$ را از جنس $\sin\theta$ بدست می آوریم:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

چون $180^\circ > \theta > 90^\circ$ می باشد؛ زیرا ضلع دوم θ در بع دوم است؛ پس $90^\circ > \frac{\theta}{2} > 45^\circ$ است $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ می باشد.

4- $\sin\frac{\pi}{12}$ را از جنس $\sin\frac{\pi}{6}$ در یابید.

حل: اگر $\frac{\pi}{12} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \theta$ می شود.

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5- اگر $\sin\theta = \frac{12}{13}$ باشد و ضلع دوم θ در ربع دوم قرار داشته باشد $\sin\theta/2$ و $\tan\theta/2$ را دریابید.

حل:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin\theta} = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{26}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{1-\frac{5}{13}}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{\frac{8}{13}}} = \sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

6- نسبت های مثلثاتی 15° را به کمک نسبت های مثلثاتی 30° دریابید.

حل:

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

یا:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

7- اگر $\sin\beta = \frac{12}{13}$ باشد و ضلع دوم β در ربع دوم باشد، قیمت $\sin 2\beta$ مساوی است به:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) = $\frac{169}{120}$ d) هر سه درست نیست

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cdot\cos\beta$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \pm\sqrt{\frac{169-144}{169}} = -\frac{5}{13}$$ (ضلع دوم θ در ربع د وم قرار دارد)

$$\sin 2\beta = 2\cdot\frac{12}{13}(-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169}$$

(جواب b درست است).

8- $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$ مساوی است به:

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

حل:

$$\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos 3\beta - \cos\beta\cdot\sin 3\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-3\beta)}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(-2\beta)}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = -\frac{\sin 2\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta}$$

$$= -\frac{2\sin\beta\cdot\cos\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = -2$$

(جواب c درست می باشد).

$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$

نسبت های مثلثاتی زاویه 3α

از جنس نسبت های مثلثاتی (α)

صفحهٔ کتاب: (237)   وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن نسبت های مثلثاتی 3α از جنس نسبت های مثلثاتی α را بیآموزند. • نسبت های مثلثاتی سه چند یک زاویه از جنس همین زاویه را دریافت کرده بتوانند. • طریق یافتن نسبت های مثلثاتی مجموعه سه زاویه از جنس نسبت های مثلثاتی هر سه زاویه را بیاموزند. • نسبت های مثلثاتی مجموع سه زاویه را از جنس نسبت های مثلثاتی هر زاویه دریافت کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام دادن فعالیت های مقدماتی غرض خلق کردن انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. $4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = \cos 135^\circ$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

استاد محترم، $\sin 3\alpha$ را از جنس $\sin\alpha$ به دست آورد و مثال اول صفحه(237) را حل کند.

بعد فورمول $\cos 3\alpha$ را ثبوت کند. و شاگردان فعالیت صفحه(238) را در گروپ های مناسب اجرا کنند و نتیجهٔ کار خود را به دیگران توضیح کنند.

استاد محترم، مثال های دوم، سوم و چهارم را با سهم گیری شاگرادان کارکنند.

بعد فورمول های $\cos(\alpha+\beta+\gamma), \sin(\alpha+\beta+\gamma)$ و $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ را ثبوت کند. و مثال پنجم را توسط یک شاگرد داوطلب حل گردد و اگر مشکل داشتند شما آن را حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه:

سؤال اول تمرین را حل کنید.

ارزیابی درس: (5) دقیقه:

سؤال دوم را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

- چون $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\binom{n}{n-3}a^3b^{n-3} + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n$ می‌باشد.

با استفاده از ضریب های باینوم فوق در مثلثات غرض یافتن نسبت های مثلثاتی $\tan na, \cos na, \sin na$ از فورمول های زیر استفاده می شود:

$$\cos na = \binom{n}{0}\cos^n a - \binom{n}{2}\cos^{n-2} a \sin^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\sin na = \binom{n}{1}\cos^{n-1} a \sin a - \binom{n}{3}\cos^{n-3} a \sin^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

متوجه باشید که:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: در فورمول های I و II می توانیم به جای n هر عددی را عوض کنیم:

$$\cos 3\theta = \binom{3}{0}\cos^3\theta - \binom{3}{2}\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 7\theta = \binom{7}{0}\cos^7\theta - \binom{7}{2}\cos^5\theta\sin^2\theta + \binom{7}{4}\cos^3\theta\sin^4\theta - \binom{7}{6}\cos\theta\sin^6\theta$$

$$= \cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3$$

$$= 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = \binom{3}{1}\cos^2\theta\sin\theta - \binom{3}{3}\cos^0\theta\sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\sin 7\theta = \binom{7}{1}\cos^6\theta\sin\theta - \binom{7}{3}\cos^4\theta\sin^3\theta + \binom{7}{5}\cos^2\theta\sin^5\theta + \binom{7}{7}\cos^0\theta\sin^7\theta$$

بعد از ساده کردن داریم که: $\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$

برای $\tan(na)$ داریم که:

$$\tan(na) = \frac{\binom{n}{1}\tan a - \binom{n}{3}\tan^3 a + \binom{n}{5}\tan^5 a - \ldots}{1 - \binom{n}{2}\tan^2 a + \binom{n}{4}\tan^4 a - \binom{n}{6}\tan^6 a + \ldots}$$

$$\tan 3x = \frac{\binom{3}{1}\tan x - \binom{3}{3}\tan^3 x}{1 - \binom{3}{2}\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\tan 5x = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$$

$$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

- $$\frac{\sin x\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)}{\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$$

- $$\cot 3\alpha = \frac{1}{\tan 3\alpha} = \frac{1 - 3\tan^2\alpha}{3\tan\alpha - \tan^3\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{\cot^2\alpha}}{\frac{3}{\cot\alpha} - \frac{1}{\cot^3\alpha}} = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1} = \frac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1 - 3\cot^2\alpha}$$

جواب به سؤال های تمرین

1- $\sin 90^\circ$، $\cos 90^\circ$، $\tan 90^\circ$ را به ترتیب از جنس $\sin 30^\circ$، $\cos 30^\circ$ و $\tan 30^\circ$ در یابید.

$$\sin 90^\circ = \sin(30^\circ + 30^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3-1+3+3}{8}=1$$

$$\cos 90^\circ=\cos(30^\circ+30^\circ+30^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 30^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\sin 30^\circ$$

$$-\cos 30^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{8}=\frac{0}{8}=0$$

$$\tan(\propto+\beta+\gamma)=\frac{\tan\propto+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\propto\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{1-\tan\propto\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\propto\cdot\tan\gamma}$$

$$\tan 90^\circ=\tan(30^\circ+30^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 30^\circ+\tan 30-\tan 30^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-3\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{0}$$ (تعریف نه شده است)

2- $\cos 135^\circ$ و $\tan 135^\circ$ را دریابید. $135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

حل:

$$\cos 135^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ-\cos 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\sin 60^\circ-\cos 60^\circ\sin 30^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$$

$$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ=\frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

3-

$$8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

جزء b درست است؛ زیرا:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$8\cos^3\theta - 6\cos\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 2\cos 3\theta$$

4- $\mathrm{Cos}(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ را از جنس نسبت های مثلثاتی زاویای $\hat{A}$, $\hat{B}$ و $\hat{C}$ دریابید.

حل به طریق اول:

$$Cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}) = \cos[(A+(-B)+C]$$
$$= \cos A\cos(-B)\cos C - \cos A\sin(-B)\sin C - \cos C\sin A\sin(-B) - \cos(-B)\sin A\sin C$$
$$= \cos A\cos B\cos C + \cos A\sin B\sin C + \cos C\sin A\sin B - \cos B\cdot\sin A\sin C$$

به طریق دوم:

$$\mathrm{Cos}(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}) = \cos[(\hat{A}-\hat{B})+\hat{C}]$$
$$= \cos(\hat{A}-\hat{B})\cos\hat{C} - \sin(A-B)\sin C$$
$$= (\cos A\cos B + \sin A\sin B)\cos C - (\sin A\cos B - \cos A\sin B)\sin C$$
$$= \cos A\cos B\cos C + \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C + \cos A\sin B\sin C$$

5- نشان دهید که:

$a)\ \ 4\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$

$b)\ \ \tan x\cdot\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$

حل:

a)

$$4\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$
$$4\cos x(\cos 60\cos x + \sin 60^\circ\sin x)(\cos 60^\circ\cos x - \sin 60^\circ\sin x)$$
$$= 4\cos x(\cos^2 60^\circ\cos^2 x - \sin^2 60^\circ\sin^2 x) = 4\cos x(\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}\sin^2 x)$$
$$= 4\cos x\left[\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}(1-\cos^2 x)\right] = \cos^3 x - 3\cos x + \cos^3 x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$$

b)

$$\tan x(\frac{\tan 60^\circ - \tan x}{1+\tan 60^\circ\cdot\tan x})(\frac{\tan 60^\circ + \tan x}{(1-\tan 60^\circ\tan x)}) = \tan x(\frac{\tan^2 60^\circ - \tan^2 x}{1-\tan^2 60^\circ\tan^2 x}) = \tan x(\frac{(\sqrt{3})^2 - \tan^2 x}{1-(\sqrt{3})^2\tan^2 x}$$
$$= \tan x\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \tan 3x$$

$\sin 30° + \sin 60° = ?$
$\tan 45° + \tan 60° = ?$

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی زوایا به شکل حاصل ضرب

صفحۀ کتاب (241)　　وقت تدریس (2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق تبدیل کردن نسبت های مثلثاتی مجموع و یا تفاضل دو زاویه به شکل حاصل ضرب آن ها را بیآموزند. • فورمول های تبدیل کردن حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا به شکل مجموع و یا تفاضل نسبت های مثلثاتی آن ها را بفهمند. • توسط این فورمول ها مطابقت های مثلثاتی را به اثبات رسانده بتوانند. • مجموع و یا تفاضل نسبت های مثلثاتی زوایا را به شکل حاصل ضرب و حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی را به شکل مجموع و یا تفاضل تبدیل کرده بتوانند. • در حل مسایل مثلثاتی اهمیت این تبدیل کردن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام دادن فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی از شاگردان بپرسید. $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 2\sin\frac{30^\circ + 60^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ - 60^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 15^\circ$ $\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sin(45^\circ + 60^\circ)}{\cos 45^\circ \cos 60}$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از ثبوت فورمول های که مجموع و یا تفاضل نسبت های مثلثاتی دو زاویه را به شکل حاصل ضرب تبدیل می کند، فعالیت صفحه(242) را شاگردان در گروپ ها اجرا نموده و نتیجۀ کارخود را توضیح نمایند.

بعد استاد محترم، قسمت های a و b مثال اول صفحه (242) را با سهم گیری شاگردان حل کند. شاگردان فعالیت صفحه(243) را حل کنند اگر نتوانستند استاد رهنمایی و همکای نماید که حل آن قرار زیر است.

$$\cot p + \cot q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q\cos p + \cos q\sin p}{\sin p\sin q} = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$$

$$\cot p - \cot q = \frac{\cos p}{\sin p} - \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q\cos p - \cos q\sin p}{\sin p\sin q} = \frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$$

و مثال دوم استاد حل نماید.

بعد از ثبوت فورمول های که حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا را به شکل حاصل جمع و یا تفاضل تبدیل می کند، قسمت های a و b مثال اول صفحه (244) این درس را استاد محترم با سهم گیری شاگران حل کند.

همچنین مثال های دوم، سوم، چهارم و پنجم این درس را به اثبات برسانند.

تحکیم درس (7) دقیقه

این سؤال را حل کنید.

نشان دهید که: $\sin 5x + \sin 7x = 2\sin 6x \cos x$ می باشد.

ارزیابی ختم درس:(5) دقیقه

می توانید قسمتی از سؤال دوم تمرین این درس را غرض ارزیابی از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

-1

$$\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}[\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}]=\frac{1}{2}[0+\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}$$

-2

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4}\left[4\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[(2\cos 20^\circ \cos 40^\circ)2\cos 80^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)2\cos 80^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2}+\cos 20^\circ)2\cos 80^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ + 2\cos 80^\circ \cos 20^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ + \cos(180^\circ - 80^\circ) + \cos 60^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ - \cos 80^\circ + \frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

-3 به شکل حاصل ضرب تبدیل کنید.

$$\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A = 2\cos 2A \cos A + 2\cos 6A \cos 2A$$

$$2\cos A\left[\cos 2A + \cos 6A\right] = 2\cos A\left[2\cos 4A \cos 2A\right] = 4\cos A \cos 2A \cos 4A$$

-4 نشان دهید که $\sin 19^\circ \cos 11^\circ + \sin 71^\circ \sin 11^\circ = \frac{1}{2}$ می باشد.

حل:

$$=\frac{1}{2}\left[2\sin 19^\circ \cos 11^\circ + 2\sin 71 \sin 11^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(19^\circ + 11^\circ) + (\sin(19^\circ - 11^\circ) - \cos(71^\circ + 11^\circ) - \cos(71^\circ - 11^\circ)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin 30^\circ + \sin 8^\circ - \cos 82^\circ + \cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \sin 8^\circ - \cos(90^\circ - 8^\circ) + \cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sin 8^\circ-\sin 8^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

5-

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=\frac{1}{8}$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=\sin 10^\circ\cdot\sin(60^\circ-10^\circ)\sin(60^\circ+10^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin(3\cdot 10)=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

زیرا که:

$$4\sin x\sin(60^\circ-x)\sin(60^\circ+x)=\sin 3x$$

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$

$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

$$\cot x\cot(60^\circ-x)\cot(60^\circ+x)=\cot 3x$$

$$\cot x\cot(60^\circ-x)\cot(60^\circ+x)=\frac{1}{\tan x\tan(60^\circ-x)\cdot\tan(60^\circ+x)}=\frac{1}{\tan 3x}=\cot 3x$$

:6

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A=\pi-(B+C)$$

$$\tan A=\tan[\pi-(B+C)]=-\tan(B+C)$$

$$\tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

7- تبدیل حاصل ضرب های نسبت های مثلثاتی زوایا به شکل مجموع یا تفاضل آنها:

$$1:\quad \sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=-\frac{1}{2}[\cos(50^\circ+70^\circ)-\cos(50^\circ-70)]$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos 120^\circ-\cos 20^\circ]=\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\cos 120^\circ$$

$$2:\quad \sin 105^\circ\cdot\cos 65^\circ=\frac{1}{2}[\sin 170^\circ+\sin 40^\circ]=\frac{1}{2}\sin 170^\circ+\frac{1}{2}\sin 40^\circ$$

$$3:\quad \cos 70^\circ\cdot\sin 10^\circ=\frac{1}{2}[\sin(70^\circ+10^\circ)-\sin(70^\circ-10^\circ)]=\frac{1}{2}\sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 60^\circ$$

$$4:\quad \cos 80^\circ\cdot\cos 20^\circ=\frac{1}{2}[\cos 100^\circ+\cos 60^\circ]=\frac{1}{2}\cos 100^\circ+\frac{1}{2}\cos 60^\circ$$

$$5:\quad \cos 35^\circ\sin 25^\circ=\frac{1}{2}[\sin 60^\circ-\sin 10^\circ]$$

$$3\cos 5x\cos 3x=\frac{3}{2}[\cos 8x+\cos 2x]$$

$$\sin(-\theta)\sin(-3\theta)=\frac{1}{2}[\cos 2\theta-4\cos 4\theta]$$

$6: \quad -8\cos 4y \cos 5y = -4[\cos 9y + \cos y]$

$7: \ \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}$

$$\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(15^\circ + 75^\circ) - \cos(15^\circ - 75^\circ)] = -\frac{1}{2}[\cos 90^\circ - \cos(-60^\circ)]$$

$$= -\frac{1}{2}[0 - \cos 60^\circ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

8- به حاصل ضرب تبدیل کنید.

$1: \quad \cos 16^\circ + \sin 34^\circ + \sin 50^\circ = 2\cos\frac{16+34}{2}\cos\frac{34-16}{2} + 2\sin 25 \cos 25$

$= 2\cos 25^\circ \cos 9^\circ + 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ = 2\cos 25^\circ (\cos 9^\circ + \cos 65^\circ)$

$= 2\cos 25^\circ (2\cos\frac{9+65}{2}\cos\frac{65-9}{2}) = 4\cos 25^\circ \cos 37^\circ \cos 28^\circ$

$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2\cos 45^\circ \sin 15^\circ$

$\cos 42^\circ + \cos 148^\circ = 2\cos 95^\circ \cos 35^\circ$

$\sin 12\beta - \sin 3\beta = 2\cos\frac{15\beta}{2}\sin\frac{9\beta}{2}$

$\cos 50^\circ - \cos 20^\circ = -2\sin 35^\circ \sin 15^\circ$

$\sin 70^\circ + \sin 20^\circ = \sqrt{2}\cos 25^\circ$

$\tan 70^\circ + \tan 10^\circ = \frac{\sin(70^\circ + 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ}$

$\cot 80^\circ - \cot 20^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2\sin 80^\circ \cdot \sin 20^\circ}$

$2: \quad \sin A - \sin 5A) + (\sin 9A + \sin 3A)$

$= (2\cos\frac{A+5A}{2}\sin\frac{A-5A}{2}) + (2\sin\frac{9A+3A}{2}\cos\frac{9A-3A}{2})$

$= 2\cos 3A \sin(-2A) + 2\sin 6A \cos 3A \cos 3A = -2\cos 3A \sin 2A + 2\sin 6A \cos 3A$

$= 2\cos 3A(\sin 6A - \sin 2A) = 2\cos 3A(2\cos\frac{6A+2A}{2}\sin\frac{6A-2A}{2})$

$= 4\cos 3A \cos 4A \sin 2A$

$3: \quad \sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C-A-B-C}{2}\cos\frac{C+A+B+C}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{2C+A+B}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{2C+A+B}{2}]$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}[2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}] = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

4- اگر A,B و C سه زاویه یک مثلث باشند پس:

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cos B \cos C + 1 = 0$ می باشد.

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2\cos^2 A-1+2\cos(B+C)\cos(B-C)$$
$$=2\cos^2 A-1-2\cos A\cos(B-C)=2\cos A[\cos A-\cos(B-C)]-1$$
$$=-2\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)]-1=-4\cos A\cos B\cos C-1$$
$$\Rightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$$

9- نشان دهید که:

$$\frac{\sin 3\propto+\sin 5\propto+\sin 7\propto+\sin 9\propto}{\cos 3\propto+\cos 5\propto+\cos 7\propto+\cos 9\propto}=\tan 6\propto$$
$$\frac{\sin 3\propto+\sin 5\propto+\sin 7\propto+\sin 9\propto}{\cos 3\propto+\cos 5\propto+\cos 7\propto+\cos 9\propto}=\frac{2\sin 6\propto\cdot\cos(-3\propto)+2\sin 6\propto\cdot\cos(-\propto)}{2\cos 6\propto\cdot\cos(-3\propto)+2\cos 6\propto\cos(-\propto)}=\tan 6\propto$$
$$\frac{\sin^2 x+\sin x\sin 3x+\sin x\sin 5x}{\cos^2 x+\cos x\cos 3x+\cos x\cos 5x}=\tan x\cdot\tan 3x$$
$$\frac{\sin x(\sin x+\sin 3x+\sin 5x)}{\cos x(\cos x+\cos 3x+\cos 5x)}=\tan x\cdot\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$$
$$=\tan\cdot\frac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=\tan x\cdot\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=\tan x\cdot\tan 3x$$

10- نشان دهید که $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$ می باشد.

یا:

$$\sin\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$$

11- اگر $A=\frac{\pi}{8}$ باشد:

$$\frac{\cos 13A+\cos A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=-2$$
$$\frac{\cos 13A+\cos A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=\frac{2\cos 7A\cdot\cos 6A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=\frac{2(-\cos 2A)}{\cos 2A}=-2\quad \begin{cases}8A=\pi\Rightarrow 6A+2A=\pi\\ 6A=\pi-2A\\ \cos 6A=\cos(\pi-2A)=-\cos 2A\end{cases}$$

12) $$\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}-\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}=2$$
$$\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}-\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}=\frac{\sin 12^\circ\cos 4^\circ-\cos 12^\circ\sin 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{2\sin 8^\circ}{2\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{2\sin 8^\circ}{\sin 8^\circ}=2$$

جواب به سؤال های تمرین

1- نشان دهید که:

$$\frac{\cos 37^\circ+\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ-\sin 37^\circ}=\cot 8^\circ$$
$$\frac{\cos 37^\circ+\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ-\sin 37^\circ}=\frac{\sin 53^\circ+\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ-\sin 37^\circ}=\frac{2\sin\frac{53^\circ+37^\circ}{2}\cdot\cos\frac{53^\circ-37^\circ}{2}}{2\cos\frac{53^\circ+37^\circ}{2}\cdot\sin\frac{53^\circ-37^\circ}{2}}=\frac{\sin 45^\circ\cdot\cos 8^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 8^\circ}=\cot 8^\circ$$

به طریق دوم:

$$\frac{\cos 37° + \sin 37°}{\cos 37° - \sin 37°} = \frac{\cos 37° + \cos(90° - 37°)}{\cos 37° - \cos(90° - 37°)}$$

$$= \frac{\cos 37° + \cos 53°}{\cos 37° - \cos 53°} = \frac{2\cos\frac{37° + 53°}{2}\cos\frac{37° - 53°}{2}}{-2\sin\frac{37° + 53°}{2}\sin\frac{37° - 53°}{2}} = \frac{\cos 45° \cos(-8°)}{-\sin 45° \sin(-8°)} = \frac{\cos 8°}{\sin 8°} = \cot 8°$$

2- حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را به شکل جمع یا تفاضل تبدیل کنید.

$a)\ \sin 5x \cos 8x$ $\quad b)\ \sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad c)\ \cos 30° \cos 60°$ $\quad d)\ \sin 32° \cdot \cos 24°$

$e)\ \cos 5x \sin 8x$ $\quad f)\ \cos 7\theta \sin 5\theta$ $\quad g)\ \sin 88° \sin 12°$ $\quad h)\ 2\sin 60° \cdot \sin 20°$

$i)\ 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $\quad j)\ 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad k)\ \sin\frac{A+B}{2} \quad \cos\frac{A \quad B}{2}$

حل:

$$a)\ \sin 5x \cos 8x = \frac{1}{2}(\sin 13x - \sin 3x)$$

$$b)\ \sin 3\theta \cos 5\theta = \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta)$$

$$c)\ \cos 30° \cos 60° = \frac{1}{2}(\cos 90° + \cos 30°)$$

$$d)\ \sin 32° \cdot \cos 24° = \frac{1}{2}(\sin 56° + \sin 8°)$$

$$e)\ \cos 5x \sin 8x = \frac{1}{2}(\sin 13x + \sin 3x)$$

$$f)\ \cos 7\theta \sin 5\theta = \frac{1}{2}(\sin 12\theta - \sin 2\theta)$$

$$g)\ \sin 88° \sin 12° = -\frac{1}{2}(\cos 100° - \cos 76°) = \frac{1}{2}(\cos 76° - \cos 100°)$$

$$h)\ 2\sin 60° \cdot \sin 20° = -(\cos 80° - \cos 40°) = \cos 40° - \cos 80°$$

$$i)\ 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta = (\sin 12\theta - \sin 4\theta)$$

$$j)\ 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha = (\sin 100 - \sin 50)$$

$$k)\ \sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}[\sin(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}) + \sin(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2})] = \frac{1}{2}[\sin A + \sin B]$$

3- حاصل جمع و یا حاصل تفریق نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را به حاصل ضرب تبدیل کنید.

$a:\ \cos 56° + \cos 22°$ $\quad b:\ \sin 84° - \sin 76°$ $\quad c:\ \sin 94° - \sin 86°$ $\quad d:\ \cos 86° + \cos 22°$

$e:\ \cos 84° - \cos 76°$ $\quad f:\ \sin 8\theta + \sin 4\theta$ $\quad g: \cos 95° - \cos 41°$ $\quad h: \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$

$i:\ \sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$ $\quad j:\ \cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad k: \cos 84° + \cos 76°$ $\quad l:\ \cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

حل:

$$a)\ \cos 56° + \cos 22° = 2\cos\frac{56° + 22°}{2} \cdot \cos\frac{56° - 22°}{2} = 2\cos 39° \cos 17°$$

$$b)\ \sin 84° - \sin 76° = 2\cos\frac{84° + 76°}{2} \cdot \sin\frac{84° - 76°}{2} = 2\cos 80° \cdot \sin 4°$$

c) $\sin 94° - \sin 86° = 2\cos\frac{94°+86°}{2}\cdot\sin\frac{94°-86°}{2} = 2\cos\frac{180°}{2}\cdot\sin\frac{8°}{2} = 2\cos 90°\cdot\sin 4°$

d) $\cos 86° + \cos 22° = 2\cos\frac{86°+22°}{2}\cdot\cos\frac{86°-22°}{2} = 2\cos 54°\cdot\cos 32°$

e) $\cos 84° - \cos 76° = -2\sin\frac{84°+76°}{2}\cdot\sin\frac{84°-76°}{2} = -2\sin 80°\cdot\sin 4°$

f) $\sin 8\theta + \sin 4\theta = 2\sin\frac{8\theta+4\theta}{2}\cdot\cos\frac{8\theta-4\theta}{2} = 2\sin 6\theta\cdot\cos 2\theta$

g) $\cos 95° - \cos 41° = -2\sin\frac{95°+41°}{2}\cdot\sin\frac{95°-41°}{2} = -2\sin 68°\cdot\sin 27°$

h) $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2} = 2\cos(\frac{P+Q}{2}+\frac{P-Q}{2})\frac{1}{2}\cdot\sin(\frac{P+Q}{2}-\frac{P-Q}{2})\frac{1}{2} = 2\cos\frac{P}{2}\cdot\sin\frac{Q}{2}$

i) $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6} = 2\cos\frac{10x+5x}{6}\cdot\sin\frac{10x-5x}{6}) = 2\cos\frac{15x}{6}\cdot\sin\frac{5x}{6}$

j) $\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3} = 2\cos\frac{\frac{3A}{4}+\frac{4A}{3}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{3A}{4}-\frac{4A}{3}}{2} = 2\cos\frac{25A}{24}\cdot\cos\frac{7A}{24}$

k) $\cos 84° + \cos 76° = 2\cos\frac{84°+76°}{2}\cdot\cos\frac{84°-76°}{2} = 2\cos\frac{160°}{2}\cdot\cos\frac{8°}{2} = 2\cos 80°\cdot\cos 4°$

l) $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$

4- نشان دهید که:

a) $\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \frac{2\cos\frac{6A}{2}\cdot\sin\frac{2A}{2}}{2\cos\frac{6A}{2}\cdot\cos\frac{2A}{2}} = \frac{2\cos 3A\cdot\sin A}{2\cos 3A\cdot\cos A} = \tan A$$

b) $\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \frac{2\cos(\frac{\beta+9\beta}{2})\cos(\frac{\beta-9\beta}{2})}{2\sin(\frac{\beta+9\beta}{2})\cos(\frac{\beta-9\beta}{2})} = \frac{2\cos 5\beta\cdot\cos(-4\beta)}{2\sin 5\beta\cdot\cos(-4\beta)} = \cot 5\beta$$

c) $\sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70° = \frac{1}{16}$

$= \sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}(2\sin 50°\cdot\sin 70°) = \sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}[-\cos(50°+70°)+\cos(50°-70°)]$

$= \sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}[-\cos 120°+\cos(-20°)] = \sin 10°\cdot(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})[\cos 20° - \cos 120°]$

$= \frac{1}{4}(\sin 10°\cdot\cos 20° - \sin 10°\cdot\cos 120°) = \frac{1}{4}[\sin 10°\cdot\cos 20° - \sin 10°(-\frac{1}{2})]$

$= \frac{1}{4}\left[\sin 10°\cos 20° + \frac{1}{2}\sin 10\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2\sin 10°\cos 20°}{2} + \frac{1}{2}\sin 10°\right]$

$= \frac{1}{8}\left[2\sin 10°\cos 20° + \sin 10°\right] = \frac{1}{8}[\sin 30° - \sin 10° + \sin 10°] = \frac{1}{8}(\sin 30°) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

طریق دوم:

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 30^\circ \cdot (\sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ) \cdot \sin 50^\circ$$

$$= [-\frac{1}{2}(\cos 80^\circ - \cos(-60^\circ))] \cdot \sin 50^\circ = -\frac{1}{4}[\cos 80^\circ - \frac{1}{2}] \cdot \sin 50^\circ$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{8} \cdot \sin 50 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}[\sin 130^\circ + \sin(-30^\circ)] + \frac{1}{8}\sin 50^\circ$$

$$= -\frac{1}{8}[\sin 50^\circ - \sin 30^\circ] + \frac{1}{8}\sin 50^\circ = -\frac{1}{8}\sin 50^\circ + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sin 50^\circ = \frac{1}{16}$$

d) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{16}$

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \frac{1}{2} \cdot \cos 80° = \frac{2}{2}\cos 20° \cdot \cos 40°(\frac{1}{2})\cos 80° = \frac{1}{4}[2\cos 20° \cdot \cos 40 \cdot \cos 80°]$$

$$= \frac{1}{4}[2\cos 20° \cos 40°]\cos 80° = \frac{1}{4}[\cos 60° + \cos 20°]\cos 80° = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \cos 20°\right]\cos 80°$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2})\cos 80° + \cos 20° \cdot \cos 80°\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\left[2(\frac{1}{2})\cos 80° + 2\cos 20° \cos 80°\right]$$

$$= \frac{1}{8}[\cos 80° + \cos(20° + 80°) + \cos(20° - 80°)] = \frac{1}{8}[\cos 80° + \cos 100° + \cos 60°]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80° + \cos(180° - 80) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}\left[\cos(80° - \cos 80°) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

5- اگر $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ باشد (مجموع زوایای داخلی یک مثلث) نشان دهید که:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

حل: طریقه اول:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}) = 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{\frac{A+B+A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B-A+B}{2}}{2})$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{2A}{4} \cdot \cos\frac{2B}{4}) = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$A + B + C = 180$$

$$A + B = 180 - C$$

$$\sin(\frac{A+B}{2}) = \sin(90 - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}$$

طریقه دوم:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right] = 2\sin\frac{A+B}{2}\left[2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

6- نشان دهید که: $\sin 10° + \sin 50° - \sin 70° = 0$

متوجه باشید که درکتاب درسی در سطر اول صفحه 248 اشتباها $\sin 75^\circ$ نوشته شده است لطفاً انرا به $\sin 70^\circ$ تصحیح نمایید.

حل:

$$\sin 10° + (\sin 50° - \sin 70°) = \sin 10° + 2\cos\frac{50°+70°}{2}\cdot\sin\frac{50°-70°}{2}$$

$$= \sin 10° + 2\cos 60°\cdot\sin(-10)$$

$$= \sin 10° - 2\cos 60°\cdot\sin 10° = \sin 10° - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 10° = 0$$

7- $\sin 30°\cos 60° + \cos 30°\sin 60° = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$$\sin 30°\cos 60° + \cos 30°\sin 60°$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(60°+30°)+\sin(60°-30°)] + \frac{1}{2}[\sin(60°+30°)-\sin(60°-30°)]$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 90° + \sin 30°) + \frac{1}{2}(\sin 90° - \sin 30°) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1$$

جزء b صحت دارد.

8- توسط فورمول های جمع و یا تفاضل نشان دهید که:

a) $\sin(180°+\theta) = -\sin\theta$ c) $\cos(180°+\theta) = -\cos\theta$ e) $\sin(360°-\theta) = -\sin\theta$

b) $\sin(270°+\theta) = -\cos\theta$ d) $\cos(270°+\theta) = \sin\theta$ f) $\cos(360°-\theta) = \cos\theta$

حل:

a) $\sin(180°+\theta) = \sin 180\cdot\cos\theta + \cos 180\cdot\sin\theta = 0 + (-1)\cdot\sin\theta = -\sin\theta$

b) $\sin(270°+\theta) = \sin 270\cdot\cos\theta + \cos 270\cdot\sin\theta = -\cos\theta$

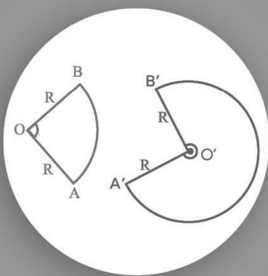
c) $\cos(180°+\theta) = \cos 180\cdot\cos\theta + \sin 180\cdot\sin\theta = -\cos\theta$

d) $\cos(270°+\theta) = \cos 270\cdot\cos\theta - \sin 270\cdot\sin\theta = -\sin\theta$

e) $\sin(360°-\theta) = \sin 360\cdot\cos\theta - \cos 360\cdot\sin\theta = -\sin\theta$

f) $\cos(360°-\theta) = \cos 360\cdot\cos\theta + \sin 360\cdot\sin\theta = \cos\theta$

$$\begin{cases} \sin 270 = -1 \\ \cos 180 = -1 \\ \cos 270 = 0 \\ \cos 360 = 1 \\ \sin 360 = 0 \end{cases}$$



طول قوس (Arc Length)
قطاع و قطعه یک دایره
صفحهٔ کتاب درسی: (249)   وقت تدریس:(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی – دانشی – مهارتی – ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن طول قوس یک دایره را بیآموزند. • تعریف قطاع و قطعه را بیاموزند. • ارتباط بین طول قوس، شعاع دایره، مساحت قطاع و زاویهٔ مرکزی یک دایره را بفهمند. • مساحت قطعه و قطاع یک دایره را دریافت کرده بتوانند. • طول قوس یک دایره را دریافت کرده بتوانند. • درحل مسایل هندسی اهمیت این ارتباطات را درک کنند و به آموزش آن علاقه مند گردد.
روشهای تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی، مباحثه و...
مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از انجام دادن فعالیت های مقدماتی، غرض خلق انگیزه برای آموزش سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. $R = 5cm$ $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}Radian$ $L = ?$ $L = R\theta = 5cm(\frac{\pi}{4})^R = \frac{5\pi cm}{4}$ $L = \frac{5\cdot\frac{22}{7}}{4}cm = \frac{110}{7}\cdot\frac{1}{4}cm \approx 3.92cm$

فعالیت جریان درس (28) دقیقه

استاد محترم، در صورتی که چارت شکل وردی موجود باشد، از روی شکل نشان دهید: اگر شعاع های دو قوس باهم مساوی باشند طول این دو قوس بر حسب رادیان با اندازهٔ قوس ها متناسب می باشد.

فورمول طول قوس را به دست آرید.

بعد مثال های اول، دوم را باسهم گیری شاگردان حل کنید و مثال سوم را یک شاگرد داوطلب حل کند.

بعد قطاع یک دایره تعریف شود و فورمول مساحت قطاع را به دست آورید.

مثال های اول، دوم و سوم صفحه 251 کتاب را حل کنید. مثال های چهارم و پنجم را شاگردان حل نمایند. شاگردان فعالیت صفحه(252) را در گروپ ها کار کنند و نماینده هر گروپ کار خود را به دیگران توضیح نماید. مثال های ششم و هفتم حل شود، قطعه دایره تعریف و فورمول مساحت قطعه ثبوت شود، بعد مثال های اول و دوم را استاد محترم با سهم گیری شاگردان حل کنند.

فعالیت صفحه(256) را شاگردان اجرا کنند و استاد مثال سوم را حل نماید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس حل شود.

ارزیابی ختم درس (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤال دوم تمرین صفحه(256) از شاگردان پرسیده شود.

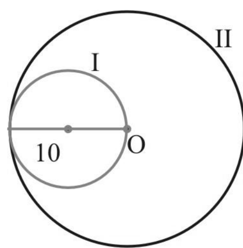
معلومات اضافی برای معلم

- طول شعاع دایره یی که طول قوس مقابل زاویه مرکزی 45° مساوی به $3\pi cm$ باشد عبارت است از:

$$45^\circ = (\frac{\pi}{4})\text{Radian} \qquad L = R\theta \Rightarrow 3\pi\text{cm} = R\frac{\pi}{4} \Rightarrow R = 12\text{cm}$$

- طول شعاع دایره که محیط و مساحت آن مساوی باشد عبارت است از: $\pi R^2 = 2\pi R \Rightarrow R = 2$
- طول شعاع دایره یی که مساحت آن شش چند محیط آن باشد مساوی است به

$$\pi R^2 = 6 \cdot 2\pi R \Rightarrow R^2 = \frac{12\pi R}{\pi} \Rightarrow \frac{R^2}{R} = \frac{12R}{R} \Rightarrow R = 12$$



دایره I از مرکز دایره II می گذرد و بر آن مماس می باشد در صورتی که مساحت دایره اولی $4cm^2$ باشد مساحت دایره دومی $16cm^2$ می شود.

- اگر شعاع یک دایره 10 واحد طول باشد مساحت قطاع های که در مقابل قوس های $90^\circ, 72^\circ, 80^\circ, 216^\circ$ و 324° باشد عبارت اند از:

  $25\pi, 20\pi, 50\pi, 60\pi$ و 90π مربع واحد طول می با شد.
- اگر مساحت یک دایره 180cm^2 باشد مساحت قطاع 80° مساوی است به: $40cm^2$
- اگر قطر یک دایره 10m باشدطول قوس های مقابل زاویه های مرکزی داده شده طور زیر می باشد.

طول قوس مقابل	زاویه مرکزی
19m	3.8 radian
12m	2.4 radian
225m	45 radian
360m	72 radian
$\frac{5\pi}{3}$ m	$\frac{\pi}{3}$ radian
$\frac{5\pi}{2}$ m	$\frac{\pi}{2}$ radian
$\frac{35\pi}{4}$ m	$\frac{7\pi}{4}$ radian
$\frac{35\pi}{6}$ m	$\frac{7\pi}{6}$ radian

جواب به سؤال های تمرین

1- مساحت قطاع دایره را در صورتی دریابید که شعاع دایره 20cm بوده و زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{6}$ رادیان باشد.

حل: چون:

$$S=\frac{1}{2}R^2\cdot\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(20cm)^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}400\cdot\frac{\pi}{6}cm^2=\frac{100}{3}\pi cm^2\approx 104.6cm^2$$

2- زاویهٔ مرکزی قطاع دایره یی را در یابید که مساحت آن $55.5cm^2$ و شعاع دایره $12cm$ باشد.

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta\Rightarrow\theta=\frac{2S}{R^2}$$

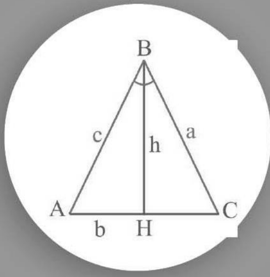
$$\theta=\frac{2(55.5)cm^2}{(12cm)^2}=\frac{111}{144}(Radian)$$

3- اگر شعاع یک دایره $10m$ باشد طول قوس هایی را که در مقابل زوایای مرکزی 3,8 رادیان و 27 رادیان واقع باشند دریابید.

حل:

$a)\ \ S=r\theta\Rightarrow S=10cm(3\cdot 8)=38cm$

$b)\ \ S=10cm\cdot 27=270cm$



مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع

صفحهٔ کتاب: (257) وقت تدریس: (3 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق به دست آوردن فورمول های مساحت یک مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین آن ها و از جنس سه ضلع یک مثلث را بیآموزند. • فورمول های دریافت شعاع محیطی و مساحت یک مثلث از جنس طول اضلاع مثلث را بیآموزند. • شعاع محیطی و محاطی یک مثلث را دریافت کرده بتوانند. • درحل مسایل ریاضیکی اهمیت این فورمول ها را درک کنند و علاقه مند به آموزش آن ها شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار های انفرادی،گروپی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته ، چارت و ....
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. $s=\frac{1}{2}(4\cdot 8)cm^2\cdot\sin 30=16\cdot\frac{1}{2}cm^2=8cm^2$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

استاد محترم، بعد از به دست آوردن فورمول مساحت مثلث، فعالیت اول این درس را توسط شاگران در گروپ ها اجرا کند و مثال های اول، دوم وسوم را با سهم گیری شاگردان حل کند.

بعد از آن که فورمول $\sin\frac{A}{2}$ را ثبوت کنید فعالیت صفحه(259) را شاگران حل کنند و استاد محترم همکاری و رهنمایی نماید. بعد از اینکه فورمول $\cos\frac{A}{2}$ را ثبوت نمودید، شاگردان فعالیت صفحه(260) را کار کنند.

استاد محترم، فورمول مساحت مثلث از جنس طول سه ضلع را با سهم گیری شاگردان به دست آورد و مثال سوم را حل کند.

فعالیت صفحه(261) را توسط یک شاگرد داوطلب حل نماید و مثال های چهارم و پنجم را خود باسهم گیری شاگردان حل کند.

استاد فورمول یافتن شعاع محیطی را به دست آورد و مثال اول را حل کند و فعالیت این صفحه را شاگردان کار کنند. مثال دوم این صفحه توسط یک شاگرد حل شود.

استاد محترم فورمول شعاع محاطی را ثبوت کند و مثال های سوم، چهارم و پنجم را با سهم گیری شاگردان حل نماید. در حل مثال پنجم اشتباه صورت گرفته است. مساحت مثلث با $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$ مساوی نیست؛ بلکه $R=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$ شعاع محیطی می باشد. بعد ازین که استاد از روی شکل ارتفاع، مساحت، شعاع دایره محیطی و محاطی مثلث متساوی الاضلاع را به دست آورد، مثال ششم را با سهم گیری شاگردان حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

مساحت مثلثی را دریابید که طول اضلاع آن $a = 7\text{cm}$ $b = 9\text{cm}$ $c = 12\text{cm}$ باشد؟

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال دوم تمرین صفحه(267) این درس را از شاگردان بپرسید.

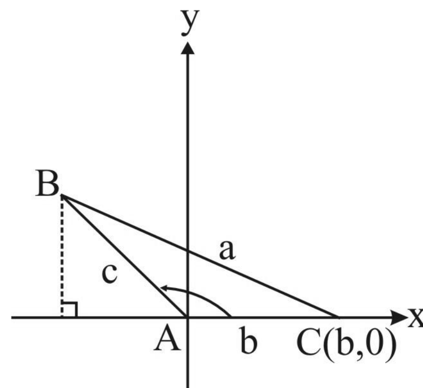
معلومات اضافی برای معلم

در هر مثلث

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

که به نام قضیه کوساین یاد می شود.



مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ را طوری در نظر میگیریم که زاویه A در حالت معیاری رسم شده باشد.

کمیات وضیعه نقطه B عبارت از $(c\cos A, c\sin A)$ می باشد.

$$\overline{B}C=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2}=\sqrt{c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A}$$

$$=\sqrt{c^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+b^2-2bc\cos A}=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$

$$|BC|=a$$

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

یا:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

به همین ترتیب:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

دریافت نسبت های مثلثاتی نصف یک زاویه یک مثلث از جنس طول اضلاع مثلث:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad , \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

چون میدانیم که:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$
$$a+b+c = 2p$$
$$a+b+c-2b = 2p-2b$$
$$a+c-b = 2(p-b)$$
$$a+b+c+2p$$
$$a+b+c-2c = 2p-2c$$
$$a+b-c = 2(p-c)$$
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

همچنین دو رابطه دیگری نیز ثبوت می شوند.

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{bc}}$$
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}}{2}}$$
$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$a+b+c=2p$$
$$a+b+c-2a=2p-2a$$
$$b+c-a=2(p-a)$$
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

در نتیجه داریم که:

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

- در صورتی که دو ضلع و یک زاویه بین این دو ضلع یک مثلث معلوم باشد مساحت های مثلثهای زیر تا یک خانه اعشاری قرار ذیل می باشد.

$a=5in \quad c=8in \quad A=45^\circ \quad \Rightarrow \quad S=14.1in^2$

$a=10ft \quad c=12ft \quad B=30^\circ \quad \Rightarrow \quad S=30ft^2$

$a=9in \quad b=11in \quad C=60^\circ \quad \Rightarrow \quad S=42.9in^2$

$b=7cm \quad c=10cm \quad A=45^\circ \quad \Rightarrow \quad S=24.7cm^2$

$a=6km \quad c=10km \quad B=57^\circ \quad \Rightarrow \quad S=25.2km^2$

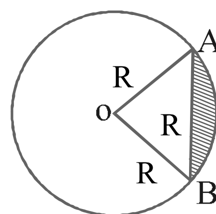
$a=25ft \quad b=32ft \quad C=67^\circ \quad \Rightarrow \quad S=368.2ft^2$

جواب به سؤال های تمرین

1- مطابق شکل مثلث OAB متساوی الاضلاع بوده که هر ضلع آن R می باشد. دایره با مرکز O رسم شده که از نقاط A و B می گذرد، مساحت قطعه ای به وتر AB مساوی است به:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$



حل:

مساحت قطعه $S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$

$$S=\frac{1}{2}R^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=R^2(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}) \qquad \theta=60=\frac{\pi}{3}^R, \sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

جزء e جواب درست می باشد.

2- اگر طول هر ساق یک مثلث متساوی الساقین $6cm$ و زاویه بین ساق های آن 30° باشد مساحت این مثلث را در یابید.

حل:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin 30^\circ=18\cdot\frac{1}{2}=9cm^2$$

3- اگر طول دو ضلع یک مثلث $5\sqrt{2}cm$ و $6cm$ و زاویه بین این دوضلع 45° باشد مساحت این مثلث را دریابید.

حل:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6cm\cdot 5\sqrt{2}cm\cdot \sin 45^{\circ}$$

$$S=5\sqrt{2}\cdot 3\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}=15cm^2$$

4- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب $3cm$، $4cm$و $5cm$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

حل:

$$P=\frac{3+4+5}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$S=\sqrt{P(p-a)(p-b)(P-c)}=\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}=\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\sqrt{36}=6cm^2$$

5- مساحت مثلث را دریابید که طول اضلاع آن $a=7cm$ ، $b=9cm$ و $c=12cm$ باشد.

حل:

چون

$$\text{P}=\frac{9+7+12}{2}=\frac{28}{2}=14\text{cm}$$

$$\text{S}=\sqrt{\text{P(p-a)(p-b)(p-c)}}=\sqrt{14(14-9)(14-7)(14-12)}=\sqrt{14(5)(7)(2)}=\sqrt{2.7.5.7.2}=14\sqrt{5}\text{cm}^2$$

6- شعاع دایره یی محیطی مثلث قایم الزاویه را دریابید که اضلاع قایم مثلث $12cm$ و $5cm$ باشد.

$$R=\frac{a.b.c}{4S}$$

$$C^2=12^2+5^2=144+25=169$$

$$c=13$$

$$P=\frac{12+13+5}{2}=\frac{30}{2}=15$$

$$S=\sqrt{15(15-12)(15-5)(15-13)}=\sqrt{15\cdot 3\cdot 10\cdot 2}=\sqrt{900}=30cm^2$$

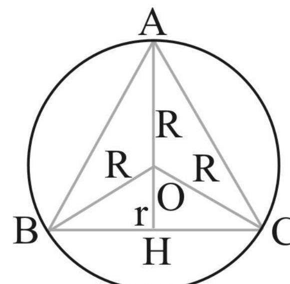
$$R=\frac{12\cdot 5\cdot 13cm^3}{4\cdot 30cm^2}=\frac{13}{2}cm=6.5cm$$

7- اگر طول قاعدۀ مثلث متساوی الساقینABC ، $a=8cm$ و شعاع دایره محاطی این مثلث $\text{r}=3\text{cm}$ باشد طول ساق ها و شعاع دایرۀ محیطی این مثلث را دریابید.

حل: چون مثلث OBC متساوی الساقین است، دو ضلع آن با هم مساوی و شعاع دایرۀ محیطی مثلث ABC می باشند و ارتفاع $r=0H$ ضلع مقابل BC را نصف میکند.

$$R=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5cm$$

$$AC=AB=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}cm$$

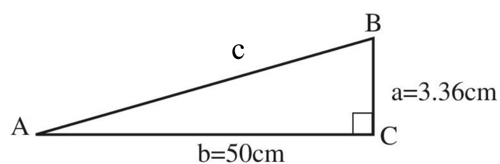


8- اگر مساحت یک مثلث قایم الزاویه $84cm^2$ و طول یک ضلع قایم آن 3.36cm باشد شعاع دایره یی محیطی این مثلث را دریابید.

$$S=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow 84=\frac{b\cdot 3,36}{2}\Rightarrow b=\frac{2\cdot 84}{3,36}=50cm$$

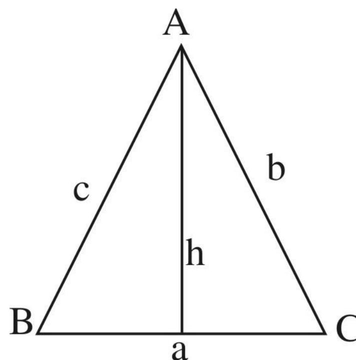
$$C^2=(3,36)^2+(50)^2=2511.7896\Rightarrow c=50.11cm$$

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}=\frac{3.36\cdot 50\cdot 50.11}{4\cdot 84}=25.055\approx 25cm$$



1- نشان دهید که مساحت مثلث متساوی الاضلاع اگر a یک ضلع مثلث باشد. $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ می باشد.

حل:



$$c^2=h^2+(\frac{a}{2})^2$$

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$S=\frac{\frac{a(\sqrt{3}a)}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

2- اگر طول اضلاع یک مثلث $C=9cm,\ b=8cm,\ a=7cm$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

حل:

$$P=\frac{7+8+9}{2}=\frac{24}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=\sqrt{3\cdot4\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt{5}cm^2$$

3- $\text{Cos}165^\circ$ و $\text{Sin}165^\circ$ را توسط فورمول های مجموع نسبت های مثلثاتی دوزاویه دریابید.

$$\text{Sin}(165^\circ)=\text{Sin}(120^\circ+45^\circ)=\text{Sin}120^\circ\cdot\text{Cos}45^\circ+\cos120^\circ\sin45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})+(-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Cos}(165^\circ)=\text{Cos}(120^\circ+45^\circ)=\text{Cos}120^\circ\text{Cos}45^\circ-\text{Sin}120^\circ\text{Sin}45^\circ$$

$$=(\frac{-1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4- $\text{Sin}(-165^\circ)=?$

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\quad c)\ -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

جواب b درست می باشد؛ زیرا $\text{Sin}(-165^\circ)=-\sin165^\circ=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5- نشان دهید که $\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ می باشد.

حل:

$$\frac{\cos2\theta\cdot\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos(2\theta+\theta)}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos3\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

6- توسط فورمول های مجموع و تفاضل دو زاویه نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را دریابید.

$\sin(30°+45°)$ $\quad \cos(150°-45°)$ $\quad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\quad \sin(135°-180°)$ $\quad \tan(180°-45°)$

حل:

$$a)\ \sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30\cdot\sin 45=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$b:\ \cos(135^\circ)=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(135^\circ)=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(135^\circ+180^\circ)=\sin 135^\circ\cdot\cos 180^\circ+\cos 135^\circ\sin 180=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)+(-\frac{\sqrt{2}}{2})(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c)\ \cos(150^\circ-45^\circ)=\cos 150^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 150^\circ$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d)\ \sin(135^\circ-180^\circ)=\sin 135^\circ\cdot\cos 180^\circ-\cos 135^\circ\cdot\sin 180^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e)\ \tan(30^\circ+60^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 30\tan 60}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\frac{1+3}{\sqrt{3}}}{0}$$ (تعریف نشده)

$$f)\ \tan(180-45)=\frac{\tan 180-\tan 45}{1+\tan 180\cdot\tan 45}=\frac{0-1}{1}=-1$$

7- توسط فورمول های مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی دو زاویه صحت رابطه های زیر را نشان دهید.

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ $\quad\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta$ $\quad\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ $\quad\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

حل:

$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin 90^\circ\cos\theta-\cos 90^\circ\sin\theta=\cos\theta-0(\sin\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(270^\circ+\theta)=\sin 270^\circ\cos\theta+\cos 270^\circ\sin\theta=(-1)\cos\theta+(0)\sin\theta=-\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos 90^\circ\cos\theta-\sin 90^\circ\sin\theta=0-(1)\sin\theta=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos 180^\circ\cos\theta+\sin 180^\circ\sin\theta=(-1)\cos\theta+(0)\sin\theta=-\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos 90^\circ\cos\theta+\sin 90^\circ\sin\theta=(0)\cos\theta+\sin\theta=\sin\theta$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin 180^\circ\cos\theta-\cos 180^\circ\sin\theta=(0)\cos\theta-(-1)\sin\theta=\sin\theta$$

8- اگر $0^\circ<\theta<90^\circ$ و $\sin\theta=\frac{2}{5}$ باشد قیمت $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ $\quad\cos\frac{\theta}{2}, \quad\sin\frac{\theta}{2}$ را دریابید.

$$a)\ \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\frac{2}{5})^2=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25}$$

$$b)\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{2}{5}(\sqrt{1-\sin^2\theta})=\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$(\cos\theta=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5})$$

$$c)\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5+\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{10}}$$

$$d)\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{10}}$$

9- نشان دهید که:

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta \qquad \cos 2\theta+1=2\cos^2\theta \qquad \cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$$

$$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta \qquad \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$$

حل:

$a)\quad \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta \qquad \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$

$b)\quad \cos 2\theta+1=2\cos^2\theta\Rightarrow\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$c)\quad \cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta=1$

$d)\quad 2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta\Rightarrow 2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\cos 2\theta$

$e)\quad \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\cos^2-\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)}=\cos\theta-\sin\theta$

10- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب $8cm,\ 7cm,\ 5cm$ باشد طول شعاع دایره های محیطی ومحاطی این مثلث را دریابید.

حل:

$$P=\frac{8+7+5}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$$S=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)^1}=\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2}=10\sqrt{3}$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{5\cdot 7\cdot 8}{4(10\sqrt{3})}=\frac{7}{\sqrt{3}} \qquad r=\frac{S}{P}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$$

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c)\ -\sin\theta \qquad d)\ \cos\theta$

حل: $\sin(180^\circ+\theta)=\sin 180^\circ\cdot\cos\theta+\cos 180^\circ\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

(جواب درست c می باشد).

12- به کمک فورمول های جمع و تفاضل نشان دهید که :

$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ و $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$ ، $\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$

حل:

$a)\quad \sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$

$\sin(360^\circ-\theta)=\sin 360\cdot\cos\theta-\cos 360\cdot\sin\theta=0\cdot\cos\theta-1\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

$b)\quad \tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\tan 180+\tan\theta}{1-\tan 180\cdot\tan\theta}=\frac{0+\tan\theta}{1-0}=\tan\theta$$

c) $\sec(360°-\theta)=\sec\theta$

$$\sec(360°-\theta)=\frac{1}{\cos(360°-\theta)}=\frac{1}{\cos 360°\cdot\cos\theta+\sin 360\cdot\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{1\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\quad 2\sin\alpha\sin\beta$ $\qquad b)\quad 2\cos\alpha\cos\beta$ $\qquad c)\quad -2\sin\alpha\sin\beta$

حل:

$$(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)-(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=-2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

جزء c صحت دارد.

14- نشان دهید که: $\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ می باشد.

حل:

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\csc 4\alpha+\cos\alpha\cdot\sec 4\alpha}{\sec 4\alpha\cdot\csc 4\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}}{\frac{1}{\sin 4\alpha\cos 4\alpha}}=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha+\cos\alpha\cdot\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha}}{\frac{1}{\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha}}$$

$$=\sin(\alpha+4\alpha)=\sin 5\alpha$$

یا: $=\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha+\cos\alpha\cdot\sin 4\alpha=\sin(\alpha+4\alpha)=\sin 5\alpha$

15- حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زیر را به شکل مجموعه و یا تفاضل بنویسید.

$\cos 100°\ \sin 50°\qquad \cos 40°\cos 60°\qquad \sin 8\theta\cos 10\theta\qquad \sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}$

حل:

a) $\cos 100\cdot\sin 50°=\frac{1}{2}[\sin(100°+50°)-\sin(100°-50°)]=\frac{1}{2}(\sin 150°-\sin 50°)$

b) $\cos 40°\cdot\cos 60°=-\frac{1}{2}[\cos(60°+40°)+\cos(60°-40°)]=\frac{1}{2}(\cos 100°+\cos 20°)$

c) $\sin 8\theta\cdot\cos 10\theta=\frac{1}{2}[\sin(8\theta+10\theta)-\sin(8\theta-10\theta)]=\frac{1}{2}(\sin 18\theta+\sin 2\theta)$

d) $\sin\frac{3\theta}{2}\cdot\sin\frac{5\theta}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(\frac{3\theta}{2}+\frac{5\theta}{2})-\cos(\frac{3\theta}{2}-\frac{5\theta}{2})]=-\frac{1}{2}(\cos 4\theta-\cos\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 4\theta)$

16- مجموعه یا تفاضل نسبت های مثلثاتی زیر را به شکل حاصل ضرب بنویسید.

$\sin 80°-\sin 72°$ ، $\sin 12\theta+\sin 8\theta$

حل:

a) $\sin 80°-\sin 72°=2\cos\frac{80°+72°}{2}\cdot\sin\frac{80°-72°}{2}=2\cos\frac{152°}{2}\cdot\sin\frac{8°}{2}=2\cos 76°\cdot\sin 4°$

b) $\sin 12\theta+\sin 8\theta=2\sin\frac{12\theta+8\theta}{2}\cdot\cos\frac{12\theta-8\theta}{2}=2\sin 10\theta\cdot\cos 2\theta$

17- نشان دهید که:

$$\frac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$$

حل:

$$\frac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=\frac{2\sin 4\theta\cdot\cos\theta}{-2\sin 4\theta\cdot\sin\theta}=-\cot\theta$$

18- مساحت یک دایره $180cm^2$ است مساحت قطاع $80°$ از این دایره را دریابید.

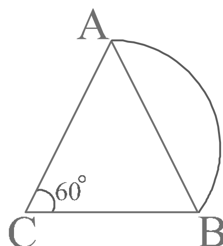
مساحت دایره $=\pi r^2$

$$r^2=\frac{180}{\pi}$$

$$r=\sqrt{\frac{180}{\pi}}\ ,\ s=\frac{1}{2}r^2\cdot\theta\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{180}{\pi}}\right)^2\cdot\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{9}=40cm^2$$

19- مطابق شکل طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی 60 درجه مساوی به 1cm است شعاع این قوس و طول وتر $\overline{AB}$ را دریابید.

حل:



$$S=R\cdot\theta$$

$$1=R\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$R=\frac{3}{\pi}cm$$

چون مثلث متساوی الاضلاع می باشد؛ پس $AB=R=\frac{3}{\pi}cm$ است.

20- $\frac{\tan 60°-\tan 30°}{1+\tan 60°\cdot\tan 30°}=?$

$a)\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad b)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad c)\ \sqrt{3}$ $\qquad d)\ -\sqrt{3}$

حل:

$$\frac{\tan 60°-\tan 30°}{1+\tan 60°\cdot\tan 30°}=\tan 60-30=\tan 30=\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(جواب درست به جزء b مطابقت دارد).

21- اگر $\sin\theta=\frac{3}{5}$ وضلع دوم θ در ربع اول واقع باشد قیمت های $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ را دریابید.

حل:

$a)\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\ ,\ \cos\theta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin 2\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

$$b)\quad \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2(\frac{3}{5})^2 = 1-\frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$$c)\quad \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{25}\cdot\frac{25}{7} = \frac{24}{7}$$

22- نشان دهید که: $\tan(45^\circ+\theta) = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ می باشد.

حل:

$$\tan(45^\circ+\theta) = \frac{\tan 45+\tan\theta}{1-\tan 45\cdot\tan\theta} = \frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

23- $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) هرسه درست نیست

حل: $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ = \cos(37+53) = \cos 90 = 0$

(جواب درست به جزء c مطابقت دارد).

24- $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ = ?$

a) $\cos 74^\circ$ b) $\cos 46^\circ$ c) $\sin 74^\circ$ d) $\sin 46^\circ$

حل: $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ = \cos(60-14) = \cos 46$

(جواب درست به جزء b مطابقت دارد).

25- $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ = ?$

a) $\cos 17^\circ$ b) $\cos 45^\circ$ c) $\sin 17^\circ$ d) $-\sin 17^\circ$

حل: $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ = \cos(14+31) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(جواب درست به جزء b مطابقت دارد).

26- $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ = ?$

a) $\cos 115^\circ$ b) $\sin 115^\circ$ c) $\cos 45^\circ$ d) $\sin 45^\circ$

حل: $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ = \cos(80-35) = \cos 45$

(جواب درست به جزء c مطابقت دارد).

27- اگر $\cos\alpha = \frac{3}{5}$، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ باشد و α و β در ربع اول واقع باشند $\cos(\alpha-\beta)$ را دریابید.

حل: چون

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

از طرف دیگر:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{56}{65}$$

28- اگر $\cos\theta=-\frac{8}{17}$، $\cos\gamma=-\frac{3}{5}$ باشد و اضلاع دوم θ و γ در ربع سوم واقع باشند $\cos(\theta-\gamma)$ را دریابید.

حل:

$$\cos(\theta-\gamma)=\cos\theta\cdot\cos\gamma+\sin\theta\cdot\sin\gamma$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(-\frac{8}{17})^2}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{189-64}{289}}=\pm\sqrt{\frac{125}{289}}=-\frac{15}{17}$$

(ضلع دوم θ در ربع سوم قرار دارد)

$$\sin\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\cos(\theta-\gamma)=(-\frac{18}{17})(-\frac{3}{5})+(-\frac{15}{17})(-\frac{4}{5})=\frac{24}{85}+\frac{60}{85}=\frac{84}{85}$$

29- نشان دهید که $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\tan x\cdot\tan y$ می باشد.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\frac{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y-(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)}{\cos x\cos y+\sin x\cdot\sin y+\cos x\cos y-\sin x\cdot\sin y}$$

$$=\frac{2\cdot\sin x\sin y}{2\cos x\cos y}=\tan x\tan y$$

30- $\cos(0°-t)=?$

a) $\sin t$ b) $\cos t$ c) $-\sin t$ d) $-\cos t$

حل: $\cos(0°-t)=\cos(-t)=\cos t$

جواب درست به جزء b مطابقت دارد.

31- نشان دهید که : $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\sin\theta$ است.

$$\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta\cdot\cos\theta)}{1+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{2\cos^2\theta}=\sin\theta$$

یا:

$$\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)}{1+\cos^2\theta-1}=\sin\theta$$

32- نشان دهید که:

$$a)\ \frac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x}=-\cot 6x\cot 2x \qquad b)\ \frac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x}=\cot x$$

$$c)\ \frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=-\cot 2x \qquad d)\ \frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=-\tan x$$

$$e)\ \frac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t}=\tan 2t$$

حل:

$$a)\ \frac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x}=\frac{\frac{2\cdot\cos 8x+4x}{2}\cdot\cos\frac{8x-4x}{2}}{-2\sin\frac{8x+4x}{2}\cdot\sin\frac{8x-4x}{2}}=\frac{2\cos 6x\cdot\cos 2x}{-2\sin 6x\cdot\sin 2x}=-\cot 6x\cdot\cot 2x$$

$$b)\ \frac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x}=\frac{2\sin\frac{6x+4x}{2}\cdot\cos\frac{6x-4x}{2}}{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\cdot\sin\frac{4x-6x}{2}}=\frac{2\sin 5x\cdot\cos x}{-2\sin 5x(-\sin x)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

$$c)\ \frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=\frac{2\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\sin\frac{x-3x}{2}}{-2\sin\frac{x+3x}{2}\cdot\sin\frac{x-3x}{2}}=\frac{2\cos 2x}{-2\sin 2x}=-\cot 2x$$

$$d)\ \frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\frac{2\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\sin\frac{x-3x}{2}}{-2\cos\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2}}=\frac{-2\cos 2x\cdot\sin x}{2\cos 2x\cdot\cos x}=-\tan x$$

$$e)\ \frac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t}=\frac{2\sin\frac{t+3t}{2}\cdot\cos\frac{t-3t}{2}}{2\cos\frac{t+3t}{2}\cdot\cos\frac{t-3}{2}}=\frac{2\sin 2t\cdot\cos t}{2\cos 2t\cdot\cos t}=\tan 2t$$

33- $\cos(x+y)\cos y+\sin(x+y)\sin y=?$

$a)\sin x \qquad b)\cos x \qquad c)-\sin x \qquad d)-\cos x$

حل:

$$(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)\cos y+(\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y)\sin y$$
$$=\cos x\cdot\cos^2 y-\sin x\cdot\sin y\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin^2 y$$
$$=\cos x\cos^2 y+\cos x\sin^2 y=\cos x(\cos^2 y+\sin^2 y)=\cos x$$

(جواب درست به جزء b مطابقت میکند).

34- $\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y=?$

$a)\sin x \qquad b)\cos x \qquad c)-\sin x \qquad d)-\cos x$

حل:

$$\sin x\cdot\cos^2 y-\cos x\cdot\sin y\cdot\cos y+\cos x\cdot\cos y\cdot\sin y+\sin x\cdot\sin^2 y$$
$$=\sin x\cdot\cos^2 y+\sin x\cdot\sin^2 y=\sin x(\cos^2 y+\sin^2 y)=\sin x$$

پس جزء a درست می باشد.

35- مساحت قطاع دایره یی که شعاع آن 2m و زاویهٔ مرکزی آن 0.5Radian باشد مساوی است به:

$a)\ 3m^2$ $b)\ 2m^2$ $c)1m^2$ d) هر سه درست نیست

حل:

$$A=\frac{1}{2}R^2\cdot\theta=\frac{1}{2}(2m)^2(0.5)=\frac{4m^2}{2}(0.5)=1m^2$$

جواب درست به جزء c مطابقت دارد.

36- اگر مساحت قطاع یک دایره $200cm^2$ و زاویهٔ مرکزی 2 رادیان باشد شعاع این دایره مساوی است به:

$a)\ 14.14cm$ $b)\ -14.14cm$ $c)14cm$ d) هر سه درست نیست

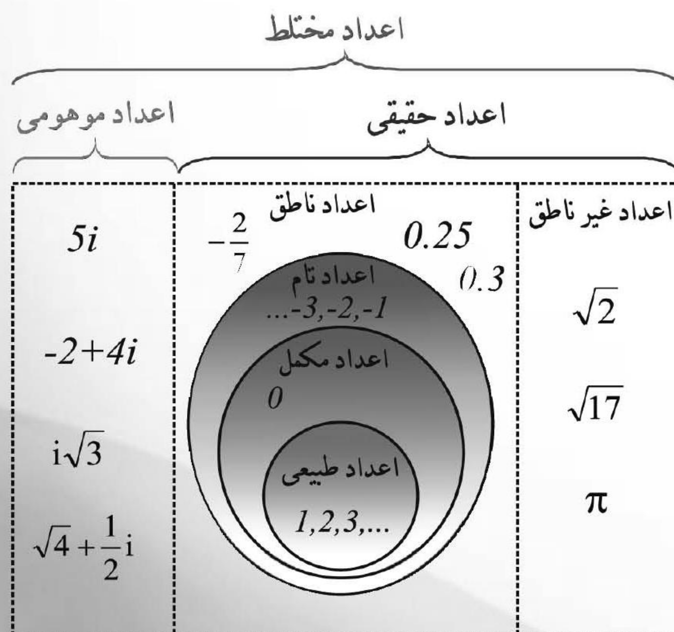
حل:

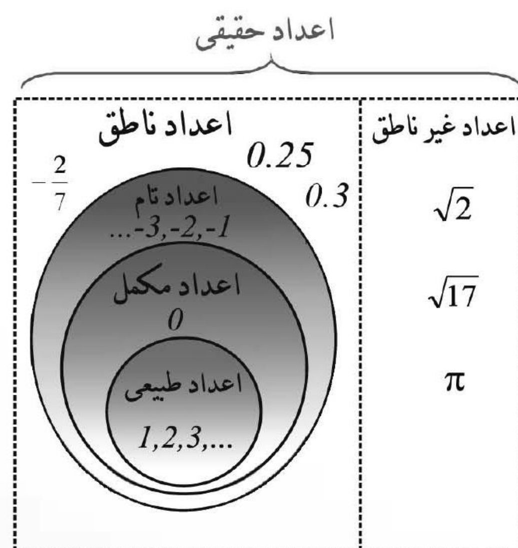
$$A=\frac{1}{2}R^2\cdot\theta$$

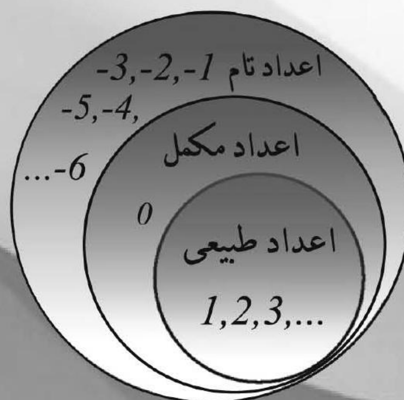
$$200=\frac{1}{2}R^2\cdot 2\Rightarrow R^2=\sqrt{200}=14.14cm$$

جواب درست به جزء a مطابقت دارد.

فصل ششم
اعداد مختلط


اعداد مختلط
اعداد موهومی
اعداد حقیقی
5i
-2+4i
i√3
√4 + 1/2 i
اعداد ناطق
-2/7
0.25
0.3
اعداد تام
...-3,-2,-1
اعداد مکمل
0
اعداد طبیعی
1,2,3,...
اعداد غیر ناطق
√2
√17
π


اعداد حقیقی
اعداد ناطق
-2/7
0.25
0.3
اعداد تام
...-3,-2,-1
اعداد مکمل
0
اعداد طبیعی
1,2,3,...
اعداد غیر ناطق
√2
√17
π


اعداد تام -3,-2,-1
-5,-4,
...-6
اعداد مکمل
0
اعداد طبیعی
1,2,3,...

$z=\sqrt{3}-2i$
Real Part of $z=?$
Imaginary Part of $z=?$

صفحۀ کتاب (277)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • تعریف اعداد مختلط را بیآموزند، اعداد موهومی و واحد اعداد موهومی را بشناسند و توان های (i) را دریافت کرده بتوانند. • قسمت حقیقی وقسمت موهومی اعداد مختلط را تشخیص کرده بتوانند. • هر عدد مختلط را به شکل معیاری عدد مختلط نوشته کرده بتوانند. • قسمت های خالص موهومی و حقیقی اعداد مختلط را نشان داده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از آن استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کار های گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض خلق انگیزه معادلاتی را روی چارت یا تخته بنویسید که در ست اعداد حقیقی حل نداشته باشد تا اهمیت و ضرورت ست اعداد مختلط را درک کنند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

اعداد موهومی را معرفی نموده با سهم گیری شاگردان مثال اول و دوم را حل کنید.

طریق یافتن توان های (i) را به شاگردان توضیح نموده و مثال سوم با سهم گیری شاگردان حل شود.

فعالیت صفحه 278 این درس را شاگردان کار کنند.

مثال (4) را حل کنید و ضرورت ست اعداد مختلط را توضیح نموده، عدد صفری مختلط را به شاگردان تعریف کنید. فعالیت صفحه (280) را شاگردان اجرا کنند.

مثال (1) و (2) این صفحه را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال ا ول تمرین حل کنید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤال دوم تمرین درس را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

واضح است که عدد $\sqrt{-1}$ یک عدد حقیقی نمی باشد $\sqrt{-1}=i$ است که i یک عدد موهومی می باشد همچنین $2i, -3i, \sqrt{5}i$ اعداد موهومی است.

-1

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^{13}=(i^2)^6\cdot i=(-1)^6\cdot i=i$

$i^{43}=-i$

$i^{20}=1$

$i^{23}=-i$

$-i^{25}=-i$

$i^{256}=1$

$(-i)^{-19}=\frac{1}{i}$

-2

$\sqrt{-1}=\text{i}\Rightarrow\sqrt{-2}=\sqrt{-1\cdot 2}=\sqrt{2}\text{i}$

$\sqrt{-3}=\sqrt{-1\cdot 3}=\sqrt{3}\text{i}$

$\sqrt{-4}=\sqrt{-1\cdot 4}=\sqrt{(2\text{i})^2}=2\text{i}$

$\sqrt{-9}=\sqrt{-1\cdot 9}=\sqrt{(3\text{i})^2}=3\text{i}$

-3

$-\sqrt{-400}=-20\text{i}$ $\qquad \frac{\sqrt{-40}}{\sqrt{-10}}=2$

$\sqrt{-7}=\text{i}\sqrt{7}=\sqrt{7}\text{i}$ $\qquad \frac{\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=-2$

$\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5}=-5$ $\qquad \frac{1}{\text{i}^9}=-\text{i}$

$\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}=-4$

$\sqrt{-1}\text{b}=\text{ib}=\text{bi}$

$\sqrt{\frac{-16}{25}}=\frac{4}{5}\text{i}$ $\qquad \sqrt{\frac{1}{-4}}=\frac{1}{2}\text{i}$

-4

$z_1=2-5\text{i}\Rightarrow \text{Re}(z_1)=2 \quad , \quad \text{im}(z_1)=-5$

$z_2=-3\text{i}\Rightarrow \text{Re}(z_2)=0 \quad , \quad \text{im}(z_2)=-3$

$z_3=-5\Rightarrow \text{Re}(z_3)=-5 \quad , \quad \text{im}(z_3)=0$

جواب به سؤال های تمرین

- قیمت های $(3i)^2, (2i)^2 \ , \ i^{202}, (i)^{79}, (i)^{-33}$ را در یابید.

حل:

$a)\ i^{-33} = \frac{1}{i^{33}} = \frac{1}{i^{4\cdot 8+1}} = \frac{1}{1\cdot i} = \frac{1}{i} = \frac{(1)(i)}{i(i)} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

$b)\ (i)^{79} = (i)^{4\cdot 19+3} = i^{4\cdot 19}\cdot i^2 \cdot i = 1(-1)\cdot i = -i$

$c)\ (i)^{202} = i^{4\cdot 50+2} = i^{4\cdot 50}\cdot i^2 = 1(-1) = -1$

$d)\ (2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$

$e)\ (3i)^2 = 9i^2 = 9(-1) = -9$

2- عدد های زیر را به شکل معیاری اعداد مختلط بنوسید.

حل:

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

$a)\ -i-4 = -4-i$

$b)\ 5i = 0+5i$

$c)\ -4i+\sqrt{2} = \sqrt{2}-4i$

$d)\ -3i = 0-3i$

3- اعداد مختلف $\sqrt{5}-\sqrt{7i},\ 7-i,\ 5+3i,\ -3i$ را به شکل جوره های مرتب بنویسید.

$a)\ -3i = (0.-3)$

$b)\ 5+3i = (5,3)$

$c)\ 7-i = (7.-1)$

$d)\ \sqrt{5}-\sqrt{3}i = (\sqrt{5},-\sqrt{3})$

4- قسمت حقیقی عدد مختلط $-i$ مساوی است به:

$a)1 \quad b)-1 \quad c)0 \quad d)2$

چون قسمت حقیقی $-i$ مساوی به 0 می باشد؛ بنا برآن جواب درست جزء c می باشد.

5- جذر عدد $\sqrt{-16}$ مساوی است به:

$.a)\ \pm 4 \quad b)-4 \quad c)\pm 4i \quad d)\pm 2$

حل: $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = \pm 4i$ جواب درست جزء c می باشد.

4i+3i=7i
4i−3i=i
4i−(−3i)=7i

عملیه های چهارگانهٔ اعداد موهومی

صفحهٔ کتاب (283)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • عملیه های چهارگانه اعداد موهومی را بیآموزند و بهفمند که خاصیت تبدیلی در عملیه جمع و ضرب اعداد موهومی صدق می کند. • اعداد موهومی را جمع، منفی ، ضرب و تقسیم کرده بتوانند و درک کنند که حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی می باشد. • در مسایل ریاضی از این عملیه ها ا ستفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کار های گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی در صورتی که چارت شکل ورودی موجود باشد روی تخته سؤال ورودی نوشته شود و غرض ایجاد انگیزه از شاگردان پرسیده شود. $3i+4i=7i$ $(10i)(5i)=50i^2=50(-1)=-50$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

مثال های اول، دوم و سوم را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

فعالیت اول این درس را شاگردان اجرا کنند.

مثال (4) را نیز با سهم گیری شاگردان حل کنید و فعالیت دوم این درس را شاگردان در گروپ ها کار کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین درس حل شوند.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال دوم این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

• $\sqrt{3-x}$ یک عدد موهومی را نشان می دهد در صورتی که $(3-x)$ عدد منفی باشد.

$3-x<0$

$3<x$

در صورتی که $x>3$ باشد عدد $\sqrt{3-x}$ یک عدد موهومی می باشد.

عدد $\sqrt{2-3x}$ در صورتی عدد موهومی می باشد که عدد $(2-3x)$ یک عدد منفی باشد. یا $x>\frac{2}{3}$ باشد.

- $(\sqrt{2+\sqrt{3}})+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=4+2\sqrt{4-3}$
$=4+2=6$

چون عدد $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ یک عدد مثبت می باشد؛ پس عدد $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ جذر مربع عدد 6 می باشد.

همچنین $10=(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$ می شود؛ پس عدد $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$ جذر مربع عدد 10 می باشد.

جواب سؤال های تمرین

1- جمع کنید. $\sqrt{7}i+\sqrt{7}i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}\,b+\sqrt{-1}\,c$

حل:

$a)\ (\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}\ c)=ib+ic=(b+c)i$

$b)\ \sqrt{-7}+\sqrt{-4}=\sqrt{7}i+2i=(2+\sqrt{7})i$

$c)\ \sqrt{7}i+\sqrt{7}i=(\sqrt{7}+\sqrt{7})i=2\sqrt{7}i$

2- تفریق کنید.

$\sqrt{5}i-\sqrt{5}i$, $12i-7i$, $5i-2i$

a) $\sqrt{5}i-\sqrt{5}i=(\sqrt{5}-\sqrt{5})i=0i$

b) $12i-7i=(12-7)i=5i$

c) $5i-2i=(5-2)i=3i$

3- عددهای موهومی زیررا باهم ضرب وتقسیم کنید.

a) $(\frac{7}{4}i)(\frac{-2}{9}i)=(\frac{7}{4})(\frac{-2}{9})i\cdot i=-\frac{7}{18}i^2=-\frac{7}{18}(-1)=\frac{7}{18}$

b) $(\sqrt{7}i)(-7i)=(\sqrt{7})(-7)(i\cdot i)=-7\cdot\sqrt{7}i^2=7\sqrt{7}$

c) $(3i)(5i)=3\cdot 5i\cdot i=15i^2=-15$

d) $\frac{16i}{-4i}=\frac{16}{-4}=-4$

e) $\frac{13i}{26i}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}$



عملیه های جمع و تفریق اعداد مختلط

صفحهٔ کتاب (285)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق جمع و تفریق اعداد مختلط را بیآموزند. • اعداد مساوی مختلط، عنصر عینت در عملیه جمع و معکوس جمعی اعداد مختلط را بشناسند. • اعداد مختلط را جمع و تفریق کرده بتوانند. • معکوس های جمعی اعداد مختلط را دریافت کرده بتوانند • در حل مسایل ریاضی از این عملیه ها استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کار های گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت مقدماتی غرض خلق انگیزه سؤال ورودی یا از روی چارت و یا از روی تخته از شاگردان پرسیده شود. $3x-2yi=6+i \qquad 3x=6\Rightarrow x=2 \qquad -2y=1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از تعریف اعداد مساوی مختلط مثال (1) با سهم گیری شاگردان حل شود.

فعالیت صفحه 285 را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند.

بعد از تعریف جمع اعداد مختلط مثال (2) حل شود و عنصر عنیت جمع اعداد مختلط معرفی شده، معکوس جمعی یک عدد مختلط تعریف شود و همچنان نشان داده شود که حاصل جمع هر عدد مختلط با معکوس جمعی عدد مساوی به عنصر عینت عملیه جمع اعداد مختلط می باشند.

فعالیت دوم این درس را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند بعد از تعریف عملیه تفریق اعداد مختلط، مثال های (1) و (2) با سهم گیری شاگردان حل شوند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس حل شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال دوم تمرین این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

- اعداد مختلط زیر در حالت معیاری عبارت اند از:

$(1-i)-(3+4i)+2i=-2-3i$

$(2a+ib)-(2a-ib)=0+2bi=2bi$

$(3+5i)+(2+4i)=5+9i$

$(8-3i)+(-5+6i)=3+3i$

$(3-4i)-(-5+6i)=8-10i$

$2+(3i+5)=7+3i$

$(2-5i)-(3+4i)-(-2+i)=1-10i$

$-i-2-(3-4i)-(5-2i)=-10+5i$

- اگر اعداد مختلط زیر باهم مساوی باشند قیمت های x و y را دریابید.

$(2x-1)+(3y+2)i=5-4i$

$2x-1=5 \qquad 3y+2=-4$

$x=3 \qquad y=-2$

- اگر اعداد مختلط زیر باهم مساوی باشند قیمت m و k را دریابید.

برای $(m,k\in IR)$ $2+mi=k-3i$ داریم که: $k=2$, $m=-3$

- اگر اعداد مختلط زیر باهم مساوی باشند قیمت های a و b را دریابید.

$a+3i=5+3bi+2a \Rightarrow a=-5 \qquad b=1$

- اگر $z_1=x+3y-2i$ و $z_2=1-(x+2y)i$ باشد در صورتی که $z_1=z_2$ باشد $x=4$ و $y=-1$ میباشد.

جواب به سؤال های تمرین

- اعداد مختلف زیر را جمع کنید.

$a)\quad (2+5i)+(3+4i)=(2+3)+(5+4)i=5+9i$

$b)\quad (-3+6i)+(10-7i)=(-3+10)+(6-7)i=7-i$

$c)\quad (13-12i)+(13+12i)=(13+13)+(-12+12)i=26+0i=26$

$d)\quad (\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)=(\sqrt{3}+d)+(-c+5c)i=(\sqrt{3}+d)+4ci$

2- اعداد مختلط زیر را از همدیگر تفریق کنید.

$a)\quad (5-i)-(7+3i)=(5-i)+(-7-3i)=(5-7)+(-1-3)i=-2-4i$

$b)\quad (2\sqrt{3}+5\sqrt{7}i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}i)=2\sqrt{3}+5\sqrt{7}i+(-\sqrt{3}-3\sqrt{7}i$

$\quad =(2\sqrt{3}-\sqrt{3})+(5\sqrt{7}-3\sqrt{7})i=\sqrt{3}+2\sqrt{7}i$

$c)\quad (3c+4di)-(3c+8di)=(3c+4di)+(-3c-8di)=(3c-3c)+(4d-8d)i=-4di$

3- معکوس جمعی اعداد مختلط زیر را در یابید.

$2+3i \quad , \quad (2,-3) \quad , \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}i$

حل a: معکوس جمعی $2+3i$ عبارت از $-2-3i$ می باشد.

زیرا که: $(2+3i)+(-2-3i)=(2-2)+(3-3)i=0+0i$

حل b: معکوس جمعی $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$ عبارت از $-\sqrt{2}-\sqrt{3}i$ می باشد.

زیرا که: $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)+(-\sqrt{2}-\sqrt{3}i)=(\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{3})i=0+0i$

حل **C:** معکوس جمعی $(2,-3)$ عبارت از $(-2,3)$ می باشد.

4- هرگاه $(x,y,\in R)$ و $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ باشد قیمت های y,x را دریابید.

حل:

$$3x+2iy-ix+5y=3x+5y+(2y-x)i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x+2y=5\\3x+5y=7\end{cases}\quad\begin{cases}-3x+6y=15\\3x+5y=7\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$$

5- عملیه های زیر را انجام دهید وجواب های خود را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$a)\quad (2+3i)+(-5+2i)=(2-5)+(3+2)i=-3+5i$

$b)\quad (-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)=(-5-4i)+(2+\sqrt{2}i)=(-5+2)+(-4+\sqrt{2})i=-3+(-4+\sqrt{2})i$

$c)\quad (2+3i)+(-5-i)=(2-5)+(3i-i)=-3+(3-1)i=-3+2i$

$d)\quad (6-5i)+(3+2i)=(6+3)+(-5+2)i=9-3i$

$e)\quad (3.7+6.1i)-(1+5.9i)=(3.7+6.1i)+(-1-5.9i)=(3.7-1)+(6.1-5.9)i=2.7+0.2i$

$f)\quad (8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)=(8+7)+(\frac{3}{4}-\frac{2}{3})i=15+\frac{1}{12}i$

$g)\quad (-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)=(-6+4)+(-\frac{5}{8}+\frac{1}{2})i=-2-\frac{1}{8}i$

$h)\quad (-2+5i)+(3-i)=(-2+3)+(5-1)i=1+4i$

$i)\quad (3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)=(3+11)+(\frac{3}{5}-\frac{7}{15})i=14+\frac{2}{15}i$

$j)\quad (-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)=(-4+13)+(-\frac{5}{6}+\frac{3}{8})i=9-\frac{11}{24}i$

$k)\quad (-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})=(-7-\sqrt{-1}\sqrt{72})+(8+\sqrt{-1}\sqrt{50}$

$\quad =(-7-\sqrt{72}i)+(8+\sqrt{50}i)=(-7+8)+(-\sqrt{72}+\sqrt{50})i=1+(\sqrt{50}-\sqrt{72})i$

$l)\quad (\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})=\sqrt{3}+\sqrt{2}i-\sqrt{12}-\sqrt{8}=(\sqrt{3}-\sqrt{12}-\sqrt{8})+\sqrt{2}i$

$\quad =\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i=(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})+\sqrt{2}i$

6- معکوس های جمعی اعداد مختلط زیر را دریابید.

$a)2-3i$

معکوس جمعی آن $-2+3i$ می باشد.

$b)1-i\Rightarrow -1+i$ (معکوس جمعی) $\qquad c)5-8i\Rightarrow -5+8i$ (معکوس جمعی)

$d)-5i\Rightarrow 5i$ (معکوس جمعی) $\qquad e)8+11i\Rightarrow -8-11i$ (معکوس جمعی)

$f)-1+i\Rightarrow 1-i$ (معکوس جمعی) $\qquad g)-13+13i\Rightarrow 13-13i$ (معکوس جمعی)

$h)2i\Rightarrow -2i$ (معکوس جمعی)



ضرب اعداد مختلط

صفحهٔ کتاب (289)　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• طریق ضرب دو عدد مختلط را بیآموزند. • مزدوج (Conjugate) یک عدد مختلط را بشناسند. • طریق یافتن معکوس ضربی یک عدد مختلط را بیآموزند. • اعداد مختلط را با هم ضرب کرده بتوانند. • مزدوج های اعداد مختلط را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از ضرب اعداد مختلط استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض ایجاد انگیزه سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود. $(2-3i)(3+4i)=6+8i-9i-12i^2=6-i-12(-1)=6-i+12=18-i$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از تعریف عملیهٔ ضرب اعداد مختلط مثال (1) با سهم گیری شاگردان حل شود و فعالیت اول این درس را شاگردان اجرا کنند.

مزدوج یک عدد مختلط و خاصیت های آن به شاگردان توضیح شود تا مزودج هر عدد مختلط را دریافت کرده بتوانند و این را بیاموزند که حاصل جمع و حاصل ضرب یک عدد مختلط با مزدوج آن یک عدد حقیقی و حاصل تفریق عدد و مزدوج آن یک عدد موهومی می باشد.

مثال دوم با سهم گیری شاگردان حل شود و فعالیت دوم این درس را شاگردان اجرا کنند.

طریق یافتن معکوس ضربی یک عدد مختلط توضیح گردد و مثال های سوم و چهارم با سهم گیری شاگردان حل شوند وفعالیت اخیر این درس را شاگردان اجرا کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

قسمتی از سؤال اول تمرین این درس کار شود.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

قسمتی از سؤال دوم تمرین از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

- خاصیت های الجبری اعداد مختلط:

اگر z_3, z_2, z_1 اعداد مختلط باشند؛ پس خاصیت های زیر صدق می کند.

1- خاصیت تبدیلی عملیه جمع: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2- خاصیت اتحادی عملیه جمع: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

3- خاصیت بستگی عملیه جمع: $z_1 \in C, z_2 \in C \Rightarrow (z_1 + z_2) \in C$

4- خاصیت تبدیلی در عملیه ضرب: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

5- خاصیت اتحادی عملیه ضرب: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

6- خاصیت بستگی عملیه ضرب: $z_1 \in C, z_2 \in C \Rightarrow (z_1 \cdot z_2) \in C$

7- خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

-

$(2i)(4i) = -8$ $\quad$ $(3 - i)(4 + i) = 13 - i$

$-2i(4 - 6i) = -12 - 8i$ $\quad$ $(1 + 2i)(3 - 4i) = 11 + 2i$

$(3 - \sqrt{-4})(-2 + \sqrt{-49}) = 8 + 25i$ $\quad$ $(2 + 9i)(2 - 9i) = 85$

$(2 - 3i)(1 + i) = 5 - i$ $\quad$ $(1 + i)(2 + 3i) = -1 + 5i$

$(5 + 2\sqrt{-4})(3 - \sqrt{-4}) = 23 + 2i$ $\quad$ $(2 + \sqrt{-3})(3 - \sqrt{-3}) = 9 + \sqrt{3}i$

-

$-3i$	$-3-5i$	$1-2i$	$2a-b$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}i$	$2-3i$	$1+2i$	عدد
$\frac{1}{3}i$	$-\frac{3}{34}+\frac{5}{34}i$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$	$\frac{2a}{b^2+4a}+\frac{bi}{b^2+4a}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{i}{3}$	$-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$	$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$	معکوس ضربی

-

$(1 + i)^2 = 2i$

$(1 - i)^{18} = [(1 - i)^2]^9 = (1 - 2i + i^2)^9 = (1 - 2i - 1)^9 = (-2i)^9 = -2^9 \cdot i^9 = -2^9 i$

$z = 2 + 5i \Rightarrow z^{-1} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

$(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$ $\quad$ $(3 - 4i)^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

$(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$ $\quad$ $(3,4)^2 = -7 + 24i$

$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ $\quad$ $(3 - \sqrt{-4})^{-3} = \frac{-9}{2197} + \frac{46}{2197}i$

$(a + bi)^{-2} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{2ab}{(a^2 + b^2)}i \quad (a \neq 0 \;,\; b \neq 0)$

$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2 b - b^3)i$

$(a - bi)^3 = a^3 - 3ab^2 - (3a^2 b - b^3)i$

و نیز $(-ai)^4 = a^4$ است.

$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=1 \qquad (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=1 \qquad (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-2}(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1$

•

$$(3-\sqrt{-4})^{-3}=\frac{1}{(3-\sqrt{-4})^3}=\frac{1}{(3-\sqrt{4}\sqrt{-1})^3}=\frac{1}{(3-2i)^3}=\frac{(3+2i)^3}{(3-2i)^3(3+2i)^3}$$

$$=\frac{(3)^3+3\cdot 3^2\cdot 2i+3\cdot 3(2i)^2+(2i)^3}{[(3-2i)(3+2i)]^3}=\frac{27+54i-36-8i}{(9+4)^3}=\frac{-9+46i}{2197}=\frac{-9}{2197}+\frac{26}{2197}i$$

•

$$(a+bi)^{-2}=\frac{1}{(a+bi)^2}\cdot\frac{(a-bi)^2}{(a-bi)^2}=\frac{(a-bi)^2}{[(a+bi)(a-bi)]^2}=\frac{a^2-2abi-b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$$

$(a\neq 0, b\neq 0)$

$$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=\frac{1}{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}=\frac{1}{(-\frac{1}{2})^3-3(-\frac{1}{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+3(-\frac{1}{2})\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i}=\frac{8}{-1-3\sqrt{3}i+9+3\sqrt{3}i}=\frac{8}{8}=1$$

• خاصیت های مزدوج یک عدد مختلط:

در صورتی $z=\overline{z}$ می باشد که z یک عدد حقیقی باشد:

$1:\ \overline{(\overline{z_1})}=z_1 \qquad 2:\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\ \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

$3:\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \qquad 4:\ \overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2\neq 0)$

$5:\ \overline{(\frac{1}{z_1})}=\frac{1}{\overline{z_1}} \quad (z_1\neq 0) \qquad 6:\ \overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$

$7:\ |z_1|=|\overline{z}_1|=|-z_1|=|-\overline{z}| \qquad 8:\ z_1\cdot\overline{z}_1=|z_1|^2$

- $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$
- $x^2+9=(x+3i)(x-3i)$
- $x^2+2x+5=[(x+1)+2i][(x+1)-2i]$
- $x^2-6x+11=[x-3+\sqrt{2}i][x-3-\sqrt{2}i]$

جواب به سؤال های تمرین

1- اعداد مختلط زیر را باهم ضرب کنید.

a) $(2+i)(3-2i)=2(3)-2(2i)+3(i)-2(i)^2=6-4i+3i+2=8-i$

b) $(-2+3i)(4-2i)=-8+4i+12i-6i^2=-8+16i+6=-2+16i$

c) $(5+2i)(5-3i)=25-15i+10i-6i^2=25-5i-6(-1)=25-5i+6=31-5i$

d) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=3-\sqrt{6}i+\sqrt{6}i+2=5$

e) $(3+i)(3-i)=9-3i+3i-i^2=9+1=10$

f) $(2-5i)(2+5i)=4+10i-10i-25i^2=4+25=29$

g) $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)=6-i^2=7$

2- معکوس ضربی اعداد مختلط زیر را در یابید.

$1-i\ ,\ 2+4i\ ,\ 5-3i\ ,\ 3a-4bi\ ,\ (7,4)$

حل: معکوس ضربی $1-i$:

a) $\frac{1}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$:2+4i$

b) $\frac{1}{(2+4i)}\frac{(2-4i)}{(2-4i)}=\frac{2-4i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{1`}{5}i$

c) $\frac{1}{(5-3i)}\frac{(5+3i)}{(5+3i)}=\frac{5+3i}{25+9}=\frac{5+3i}{34}=\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

یا به طریق مستقیم(Direct method) می توانیم معکوس ضربی عدد مختلط 5-3i را این طور نیز به دست بیاوریم:

$(5-3i)(x+yi)=1+0i$

$5x+5yi-3xi-3yi^2=1+0i$

$5x+3y=1$

$5y-3x=0\Rightarrow x=\frac{5}{34}\qquad y=\frac{3}{34}$

پس معکوس ضربی عدد 5-3i عبارت است از:

$\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

$d)\ \frac{1}{3a-4bi}(\frac{3a+4bi}{3a+4bi})=\frac{3a+4bi}{9a^2-16b^2i^2}=\frac{3a+4bi}{9a^2+16b^2}=\frac{3a}{9a^2+16b^2}+\frac{4b}{9a^2+16b^2}i$

نخست $(7,4)$ را به شکل $7+4i$ می نویسیم بعداً معکوس ضربی آن را دریافت می نمایم:

یا به طور مستقیم:

$(3a-4b):(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(\frac{3a}{9a^2+16b^2},\frac{4b}{9a^2+16b^2}i)$

e) $(7,4):(\frac{7}{49+16},\frac{-4}{49+16})=(\frac{7}{65},\frac{-4}{65}i)$

$\frac{1}{7+4i}\frac{(7-4i)}{(7-4i)}=\frac{7-4i}{49+16}=\frac{7-4i}{65}=\frac{7}{65}-\frac{4}{65}i$

3- افاده های زیر را تجزیه کنید.

a) $x^2+16=x^2-(-1)16=x^2-16i^2=x^2-(4i)^2=(x-4i)(x+4i)$

b) $x^2+8=x^2-(-1)8=x^2-8i^2=x^2-(\sqrt{8}i)^2=(x-\sqrt{8}i)(x+\sqrt{8}i)$

c) $x^2+5=x^2-(-1)5=x^2-5i^2=x^2-(\sqrt{5}i)^2=(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)$

$d)\ x^2+7=x^2-(-1)7=x^2-7i=x-(\sqrt{7}i)^2=(x-\sqrt{7}i)(x+\sqrt{7}i)$

4- قیمت های $(-3+2i)^2$ و $(2+i)^2$ را در یابید.

حل:

$a) \quad (2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4+2i+2i+i^2 = 4+4i-1 = 3+4i$

$b) \quad (-3+2i)^2 = (-3+2i)(-3+2i) = 9-6i-6i+4i^2 = 9-12i-4 = 5-12i$

5- اگر $z = 4-3i$ باشد، $8z - z^2$ را در یابید.

حل:

$8z = 8(4-3i) = 32-24i$

$z^2 = (4-3i)^2 = (4-3i)(4-3i) = 16-12i-12i+9i^2 = 16-12i-7-24i$

$8z - z^2 = (32-24i)-(7-24i) = 25$

6- این معادله $x + yi = (2-3i)(2+3i)$ را حل کنید.

حل:

$(2-3i)(2+3i) = 4+6i-6i-9i^2 = 4+9 = 13$

$x + yi = 13 + 0i$ یا $x + yi = 13$

$\Rightarrow x = 13 \quad , \qquad y = 0$

7- نشان دهید که: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ جذر مربع i است.

حل:

$(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^2$

$\frac{2}{4} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{2}{4}i^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{2}i - \frac{2}{4} = i$

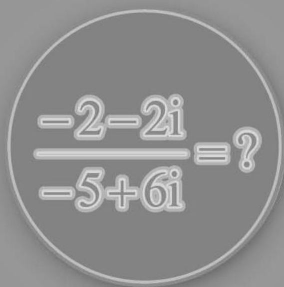
یا: $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = i$

8- نشان دهید که: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ جذر سوم $-i$ می باشد.

$(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^3 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 - 3(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2}i) + 3(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}i)^2 - (\frac{1}{2})^3$

$= \frac{\sqrt{27}}{8} - \frac{9}{8}i - 3\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i = \frac{\sqrt{27} - 9i - 3\sqrt{3} + i}{8} = \frac{-8i}{8} = -i$

یا: $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^3 = -i$ می شود.



تقسیم دو عدد مختلط

(Divison of tow complex numbers)

صفحهٔ کتاب (293) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	در اخیر این درس شاگردان باید: • طریق تقسیم کردن دو عدد مختلط را بیآموزند. • حاصل تقسیم (خارج قسمت) را به شکل معیاری نوشته کرده بتوانند. • اعداد مختلط را بالای یکدیگر تقسیم کرده بتوانند. • خاصیت های مزدوج اعداد مختلط را بالای اعداد مختلط تطبیق کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از عملیهٔ تقسیم اعداد مختلط استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کار گروپی، انفرادی و ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض ایجاد انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. $\frac{-2-2i}{-5+6i}=\frac{(-2-2i)(-5-6i)}{(-5+6i)(-5-6i)}=\frac{10+12i+10i+12i^2}{25+30i-30i-36i^2}=\frac{-2+22i}{61}$ $=\frac{-2}{61}+\frac{22}{61}i$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از آن که عملیه گویا ساختن به شاگردان توضیح شود، مثال اول را باسهم گیری شاگردان حل نمایید و فعالیت صفحه 293 را شاگردان اجرا کنند.

بعد از تعریف تقسیم اعداد مختلط مثال های دوم و سوم را حل کنید.

بعد از این که خاصیت های مزدوج یک عدد مختلط توضیح گردد، مثال های (1) و (2) صفحه 295 را با سهم گیری شاگردان حل کنید. فعالیت صفحه (295) را شاگردان اجرا کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

قسمتی از سؤال اول تمرین را حل کنید.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

قسمتی از سؤال دوم تمرین را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

-1

- $\frac{2+i}{3-i}\cdot\frac{5+2}{1+i}=\frac{5}{2}+i$
- $\frac{6+2i}{5-i}\cdot\frac{1-3i}{2+6i}=-\frac{16}{65}-\frac{37}{65}i$
- $\frac{4-3i}{4+3i}=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$
- $\frac{4+i}{6+2i}=\frac{13}{20}-\frac{1}{20}i$

اگر $z_1=2+4i$ و $z_2=1-3i$ باشد $\frac{z_1}{z_2}$ مساوی است به:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+4i}{1-3i}=(2+4i)(1-3i)^{-1}=(2+4i)(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i)=\frac{2+4i}{10}+\frac{6i+12i^2}{10}=\frac{-10}{10}+\frac{10}{10}i=-1+i$$

-2

- $\frac{1}{2-\sqrt{-9}}=\frac{1}{2-i\sqrt{9}}=\frac{1}{2-3i}=\frac{1}{(2-3i)}\cdot\frac{2+3i}{(2+3i)}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
- $\frac{2}{5i}=\frac{2}{5i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{2i}{5i^2}=\frac{2i}{-5}=-\frac{2}{5}i$
- $\frac{1+3i}{2i}=\frac{(1+3i)}{(2i)}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i+3i^2}{2i^2}=\frac{i-3}{-2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$
- $\frac{1}{2+4i}=0.1-0.2i$
- $\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{4-5i-6i^2}{1-4i^2}=2-i$
- $\frac{7+i}{2+i}=\frac{(7+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{14-5i-i^2}{4-i^2}=\frac{14-5i+1}{4+1}=3-i$
- $\frac{8.14+2.63i}{3.04+6.27i}=\frac{(8.14+2.63i)}{(3.04+6.27i)}\cdot\frac{(3.04-6.27i)}{(3.04-6.27i)}$

$$=\frac{(8.14)(3.04)-(8.14)(6.27i)+(2.63i)(3.04)-(2.63i)(6.27i)}{(3.04)^2+(6.27)^2}=0.85-0.89i$$

- $\frac{5-\sqrt{-4}}{7}=\frac{5-i\sqrt{4}}{7}=\frac{5-2i}{7}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}i$
- $\frac{1}{2+4i}=0.1-0.2i$
- $\frac{4+3i}{1+2i}=2-i$
- $\frac{7+i}{2+i}=3-i$
- $(\frac{1-i}{1+i})^{10}=\left[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right]^{10}=\left[\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right]^{10}=\left[\frac{1-2i-1}{1-(-1)}\right]^{10}=(\frac{-2i}{2})^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=i^2=-1$

جواب به سؤال های تمرین

1- خارج قسمت ها را در یابید.

$$a)\quad \frac{7-i}{3-5i}=\frac{(7-i)}{(3-5i)}\frac{(3+5i)}{(3+5i)}=\frac{21+35i-3i-5i^2}{9+25}=\frac{26+32i}{34}=\frac{13}{17}+\frac{16}{17}i$$

$$b)\quad \frac{5-2i}{6-i}=\frac{(5-2i)}{(6-i)}\frac{(6+i)}{(6+i)}=\frac{30+5i-12i-2i^2}{36+1}=\frac{30-7i+2}{37}=\frac{32}{37}-\frac{7}{37}i$$

$$c)\quad \frac{3-4i}{2-5i}=\frac{(3-4i)}{(2-5i)}\frac{(2+5i)}{(2+5i)}=\frac{6+15i-8i-20i^2}{4+25}=\frac{26+7i}{29}=\frac{26}{29}+\frac{7}{29}i$$

$$d)\quad \frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=0+i$$

2- اگر $z_1=-a-3bi$ و $z_2=2a-3bi$ باشد نشان دهید که $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ و $\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}}$ می باشد.

حل:

$$z_1\cdot z_2=(-a-3bi)(2a-3bi)=-2a^2+3abi-6abi+9b^2i^2=-2a^2-9b^2-3abi\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}$$
$$=-2a^2-9b^2+3abi$$
$$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=(-a+3bi)(2a+3bi)=-2a^2-3abi+6abi+9b^2i^2=-2a^2+3abi-9b^2$$
$$=-2a^2-9b^2+3abi\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-a-3bi}{2a-3bi}=\frac{(-a-3bi)}{(2a-3bi)}\frac{(2a+3bi)}{(2a+3bi)}=\frac{-2a^2-3abi-6abi-9b^2i^2}{4a^2+9b^2}=\frac{-2a^2+9b^2-9abi}{4a^2+9b^2}$$
$$=\frac{-2a^2+9b^2}{4a^2+9b^2}-\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i$$
$$\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{-2a^2+9b^2}{(4a^2+9b^2)}+\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{-a+3bi}{2a+3bi}=\frac{(-a+3bi)}{(2a+3bi)}\frac{(2a-3bi)}{(2a-3bi)}=\frac{-2a^2+3bi+6abi-9b^2i^2}{4a^2+9b^2}=\frac{-2a^2+9abi+9b^2}{4a^2+9b^2}$$
$$=\frac{-2a^2+9b^2}{4a^2+9b^2}+\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ II$$

از مقایسه رابطه I و II داریم که: $\overline{\frac{z_1}{z_2}}=\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

3- خارج قسمت ها را دریابید وجواب های خود را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$$a)\quad \frac{2}{5-i}=\frac{(2)}{(5-i)}(\frac{5+i}{5+i})=\frac{10+2i}{25+1}=\frac{10+2i}{26}=\frac{10}{26}+\frac{2i}{26}=\frac{5}{13}+\frac{1}{13}i$$

$$b)\quad \frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)}{(2+i)}\frac{(2-i)}{(2-i)}=\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}=\frac{5-5i}{5}=1-i$$

$$c)\quad \frac{2-3i}{3}=\frac{2}{3}-i$$

4- خارج قسمت $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ مساوی است به:

a) 1 b) 2 c) 3i d) -2

حل:

$$\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}=\frac{(6+6i)}{(3+3i)}=\frac{6+6i}{3+3i}\cdot\frac{(3-3i)}{(3-3i)}=\frac{18-18i+18i-18i^2}{9+9}=\frac{18+18}{18}=\frac{36}{18}=2$$

(جزء b صحت دارد).

5- جواب های خود را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$$a)\ \frac{3+4i}{4i}=\frac{(3+4i)}{(4i)}\frac{(-4i)}{(-4i)}=\frac{-12i-16i^2}{16}=\frac{-12i+16}{16}=1-\frac{12}{16}i=1-\frac{3}{4}i$$

$$b)\ \frac{-5}{2-3i}=\frac{(-5)}{(2-3i)}\frac{(2+3i)}{(2+3i)}=\frac{-10-15i}{4+9}=-\frac{10}{13}-\frac{15}{13}i$$

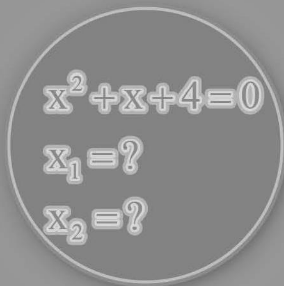
$$c)\ \frac{6}{1+3i}=\frac{(6)}{(1+3i)}\frac{(1-3i)}{(1-3i)}=\frac{6-18i}{1+9}=\frac{6}{10}-\frac{18}{10}i=\frac{3}{5}-\frac{9}{5}i$$

$$d)\ \frac{7}{7-2i}=\frac{(7)}{(7-2i)}\frac{(7+2i)}{(7+2i)}=\frac{49+14i}{49+4}=\frac{49+14i}{53}=\frac{49}{53}+\frac{14}{53}i$$

$$e)\ \frac{-4+8i}{2-4i}=\frac{(-4+8i)}{(2-4i)}\frac{(2+4i)}{(2+4i)}=\frac{-8-16i+16i+32i^2}{4+16}=\frac{-40}{20}=-2=-2+oi$$

$$f)\ \frac{3-2i}{-6+4i}=\frac{(3-2i)}{(-6+4i)}\frac{(-6-4i)}{(-6-4i)}=\frac{-18-12i+12i+8i^2}{36+16}=\frac{-26}{52}=-\frac{13}{26}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+0i$$

$$g)\ \frac{1}{i}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=0-i$$



حل معادله های درجه دوم یک مجهوله
در ساحه اعداد مختلط

صفحهٔ کتاب (297) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	در اخیر این درس شاگردان باید: • بیآموزند که معادلات درجه دوم یک مجهوله که Δ آن کوچکتر از صفر باشد در ست اعداد حقیقی حل ندارد اما درست اعداد مختلط حل دارند. • در صورت که جذور معادله درجه دوم یک مجهوله داده شده باشد معادله را تشکیل کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، چارت ها، تخته و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض ایجاد انگیزه سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود. $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

مثال اول درس را با سهم گیری فعال شاگردان حل کنید فعالیت اول این درس را شاگردان کار کنند.

همچنان مثال های دوم و سوم را نیز با سهم گیری فعال شاگردان حل کنید.

فعالیت دوم این درس را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال اول تمرین را حل کنید.

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$
$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی قسمتی از سؤال دوم از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

- $4y^2+9=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}=\pm\frac{i\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\pm\frac{3i}{2}$
- $(n-3)^2=-4\Rightarrow n-3=\pm2i\Rightarrow n=3\pm2i$

- $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm i\sqrt{2}$
- $2t^2 + 8 = 6t \Rightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$
- $3w^2 + 4w + 3 = 0 \Rightarrow w = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$
- $3x = \sqrt{x^2 - 2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}i$

جذر اساسی یا اصلی عدد حقیقی منفی (a) این طور نشان داده می شود.

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \qquad (a > 0)$$

معادله $x^2 + 2ix = 3$ را حل کنید.

$$x^2 + 2ix - 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 12}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2i \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{2(-i \pm \sqrt{2})}{2} = -i \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{x_1 = \sqrt{2} - i} \qquad \boxed{x_2 = -\sqrt{2} - i}$$

معادله $y^{-2} - 2y^{-1} + 3 = 0$ را حل کنید.

طریق اول:

$$u = y^{-1} \Rightarrow u^2 - 2u + 3 = 0$$

$$u^2 - 2u = -3$$

$$u^2 - 2u + 1 = -2$$

$$(u-1)^2 = -2$$

$$u - 1 = \pm i\sqrt{2}$$

$$u = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$y^{-1} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{y} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{1 \pm i\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{1 \pm i\sqrt{2}} \cdot \frac{(1 \mp i\sqrt{2})}{(1 \mp i\sqrt{2})} = \frac{1 \mp i\sqrt{2}}{1 - (-2)} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

طریق دوم:

$$\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 3 = 0 \qquad y \neq 0$$

$$1 - 2y + 3y^2 = 0$$

$$3y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1(3)}}{2(3)}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{2\pm 2i\sqrt{2}}{6}=\frac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$$

معادله $x^2-2\sqrt{2}ix-3=0$ را حل کنید.

$$\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot(-3)=8i^2+12=-8+12=4$$

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}i\pm\sqrt{4}}{2}$$

$x_1=\sqrt{2}i+1$ $\qquad$ $x_2=\sqrt{2}i-1$

$$x^2-4x+5=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=-4<0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{4i^2}}{2}=2\pm i$$
$x_1=2-i$ $\qquad$ $x_2=2+i$

$$1+\frac{8}{x^2}=\frac{4}{x}$$
$$x^2-4x+8=0$$
$$x^2-4x+4=-8+4$$
$$(x-2)^2=-4$$
$$x-2=\pm\sqrt{-4}$$
$$x=2\pm i\sqrt{4}$$
$$x=2\pm 2i$$

$$x^3-1=0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$
$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$x^2+x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$
$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$x^2-2x+3=0$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x^2+2ix=3$$
$$x_1=\sqrt{2}-i$$
$$x_2=-\sqrt{2}-i$$

$$4y^2+9=0$$
$$4y^2=-9$$
$$y=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$$
$$y=\pm\frac{i\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\pm\frac{3i}{2}$$

$$(n-3)^2=-4$$
$$n-3=\pm 2i$$
$$n=3\pm 2i$$

$$2t^2+8=6t$$
$$2t^2-6t+8=0$$
$$t^2-3t+4=0$$
$$t=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)4}}{2(1)}$$
$$t=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$$
$$t=\frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$4u^2+8u+15=0$$
$$u^2+2u+\frac{15}{4}=0$$
$$u^2+2u+1=-\frac{15}{4}+1$$
$$(u+1)^2=-\frac{11}{4}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$
$$x=\frac{2\pm 2i\sqrt{2}}{2}$$
$$x=1\pm i\sqrt{2}$$

$$u+1=\pm\sqrt{-\frac{11}{4}}$$
$$u=-1\pm\frac{i\sqrt{11}}{2}$$
$$u=-\frac{2}{2}\pm\frac{i\sqrt{11}}{2}$$
$$u=\frac{-2\pm i\sqrt{11}}{2}$$

جواب به سؤال های تمرین

1-آن معادلهٔ درجه دوم را دریابید که جذر های آن $(3+2i)$ و $(3-2i)$ باشند.

حل:

$$x^2-(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=0$$
$$x^2-[(3+2i)+(3-2i)]x+(3+2i)(3-2i)=0 \Rightarrow x^2-(6-0)x+9+4=0 \;=x^2-6x+13=0$$

2- معادله های زیر را حل کنید:

حل:

a) $x^2-4x+13=0\ ,\quad \Delta'=4-13=-9$

$$x_1=\frac{2+\sqrt{-9}}{2}=\frac{2+3i}{2}=1+\frac{3i}{2}\qquad x_2=\frac{2-3i}{2}=1-\frac{3}{2}i$$

b) $x^2+8x+41=0\Rightarrow \Delta'=b'^2-ac=4^2-1\cdot 41=16-41=-25$

$$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{-25}\Rightarrow x_1=-4+5i\quad ,\quad x_2=-4-5i$$

c) $x^2-6x+18=0\quad \Delta'=9-18=-9\qquad x_{1,2}=3\pm\sqrt{-9}=3\pm 3i$

d) $x^4-1=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\sqrt[4]{1}\Rightarrow x=\pm 1$

e) $-4x^2+3x-5=0$

$$\Delta=9-4(-4)(-5)=9-80\qquad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-71}}{-8}=\frac{-3}{8}\pm\frac{\sqrt{71}}{8}i$$

f) $3x^2+x+2=0\qquad \Delta=1-4\cdot 3\cdot 2=1-24=-23\qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{6}$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{23}i}{6}\ ,\ x_2=\frac{-1-\sqrt{23}i}{6}$$

3- معادله های درجه دوم را تشکیل نمایید که جذر های شان طور زیر داده شده باشد:

$2+5i\,,\,2-5i$	$1+i\,,1-i$
$4i\,,-4i$	$5i\,,\,-5i$
$2i\,,\,3i$	$i\,,\,\frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\,,\,\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i\,,\,2+i$

حل: به اساس فورمول:

داریم که: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$

a) $x^2-(2+5i+2-5i)x+(2+5i)(2-5i)=0$

$x^2-4x+29=0$

b) $x^2-(4i-4i)x+(4i)(-4i)=0 \Rightarrow x^2+16=0$

c) $x^2-(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)x+(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i)(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)=0$

$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=0 \qquad x^2-\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}=0 \quad , \quad 36x^2-48x+25=0$

d) $x^2-(2i+3i)x+(2i)(3i)=0 \Rightarrow x^2-5ix+6i^2=0 \Rightarrow x^2-5ix-6=0$

e) $x^2-[(1+i)+(-1-i)]x+(1+i)(-1-i)=0$

معادله مطلوب: $x^2+0+(-1-i-i-i^2)=0 \Rightarrow x^2-2i=0$

f) $x^2-(5i-5i)x+(5i)(-5i)=0 \qquad x^2-0\cdot x-25i^2=x^2+25=0$

g) $x^2-(i-i)x+i(-i)=0 \qquad x^2+1=0 \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{i}=-i\\ \frac{1}{i}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=-i\end{array}\right.$

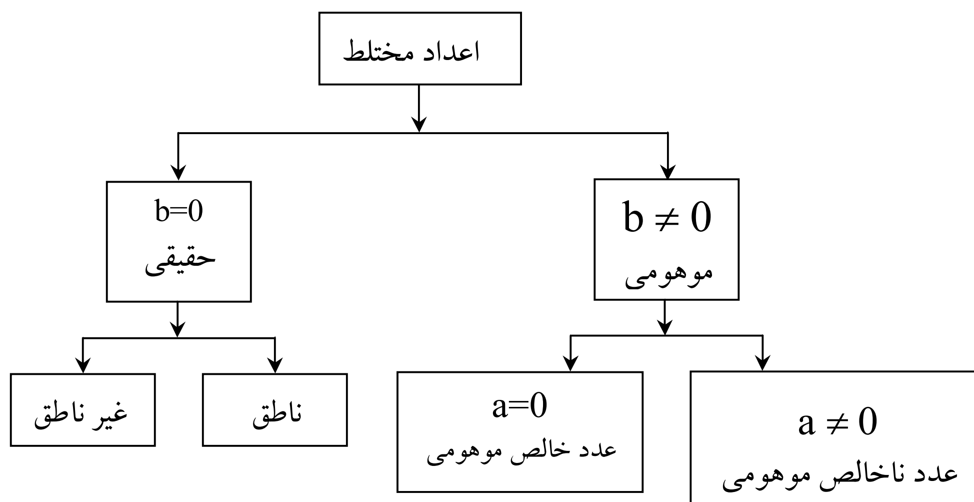
i) $x^2-(2-i+2+i)x+(2+i)(2-i)=0$

$x^2-4x+4+2i-2i-1i^2=0 \qquad x^2-4x+5=0$

معلومات اضافی:

چون میدانید موضوع اعداد مختلط بسیار وسیع بوده و یک ساختمان الجبری (فیلد) می باشد در انجنیری و فزیک مواردی استعمال زیادی دارد که از آن جمله در دوره برقی و نظریه کوانتم اتوم، و امواج الکترومقناطیسی و در دیزاین وینگ طیاره از این اعداد استفاده می شود و از طرفی دیگر برای بار اول این موضوع در نصاب تعلیمی ریاضی صنف دهم شامل گردیده است به این اساس دانشمندان تعلیم و تربیه برای صنف دهم به طور خلص با عملیه های چهارگانه اعداد مختلط را لازم شمرده اند.

اینک در مورد غرض معلومات اضافی شما محترمین یافتن قسمت های حقیقی و موهومی $(x+yi)^n$، نمایش هندسی اعداد مختلط و عملیه های چهارگانه آن و قیمت مطلقه اعداد مختلط طور خلص آورده شده است:



1- پیدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی $(x+yi)^n$

- اگر $n=\pm1, \pm2, \pm3 ...$ باشد.

- اگر $n=1$ باشد $(x+yi)^1 = x+yi$ که x قسمت حقیقی و yi قسمت موهومی آن است.

- اگر $n=-1$ باشد، $(x+yi)^{-1} = \dfrac{1}{x+yi}$

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

که $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ قسمت حقیقی و $-\dfrac{y}{x^2+y^2}.i$ قسمت موهومی آن می باشد.

- هر گاه $n=2$ باشد، در آن صورت:

$$(x+yi)^2 = x^2+2x\cdot yi+(yi)^2 = x^2+2xyi-y^2 = x^2-y^2+2xyi$$

بوده که قسمت حقیقی آن x^2-y^2 و قسمت موهومی آن $2xyi$ می باشد.

- هر گاه $n=-2$ باشد:

$$(x+yi)^{-2} = \frac{1}{(x+yi)^2} = \frac{1}{(x+yi)^2}\cdot\frac{(x-yi)^2}{(x-yi)^2} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$$

که قسمت حقیقی آن $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ و قسمت موهومی آن $-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$ می باشد.

- اگر $n=3$ باشد:

$$\begin{aligned}(x+yi)^3 &= (x+yi)(x+yi)^2 = (x+yi)(x^2-y^2+2xyi)\\ &= x^3-xy^2+2x^2yi+x^2yi-y^3i+2xy^2i^2\\ &= x^3-xy^2+(2x^2y+x^2y-y^3)\cdot i-2xy^2\\ &= (x^3-xy^2-2xy^2)+(2x^2y+x^2y-y^3)i\\ &= \underbrace{(x^3-3xy^2)}_{\text{قسمت حقیقی}}+\underbrace{(3x^2y-y^3)}_{\text{قسمت موهومی}}\cdot i\end{aligned}$$

- اگر $n=-3$ باشد؛ پس

$$(x+yi)^{-3} = \frac{1}{(x+yi)^3} = \frac{1}{(x+yi)^3}\cdot\frac{(x-yi)^3}{(x-yi)^3} = \frac{x^3-3x^2yi+3x(yi)^2-(yi)^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{x^3-3xy^2-3x^2yi+y^3i}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^3}i$$

که قسمت حقیقی آن $\dfrac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$ و قسمت موهومی آن $-\dfrac{(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3}i$ می باشد.

مثال1. $(2+3i)^2$ و $(3+4i)^{-1}$ به شکل معیاری $(a+bi)$ عبارت اند از:

$$(2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = 4+12i-9 = -5+12i$$

$$(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9-16i^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25}-\frac{4}{25}\cdot i$$

مثال2: $(2+5i)^3$ به شکل معیاری a+bi مساوی است به:

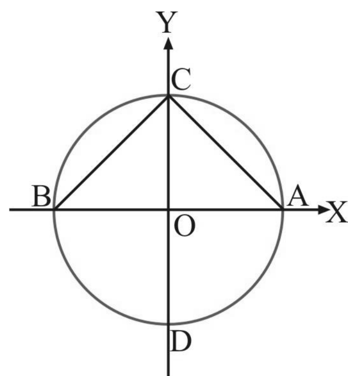
حل: $(2+5i)^3 = 2^3+3\cdot2^2\cdot5i+3\cdot2\cdot(5i)^2+(5i)^3 = 8+60i-150-125i = -142-65i$

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad , \quad (a+bi)^{-2} = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$$

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i \;,\; (a+bi)^{-3} = \frac{a^3-3ab^2}{(a^2+b^2)^3} - \frac{(3a^2b-b^3)}{(a^2+b^2)^3}i$$

2- نمایش هندسی یک عدد مختلط:

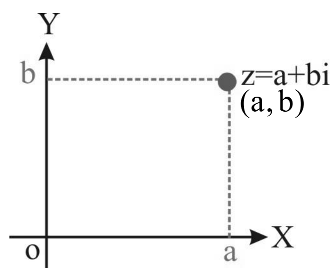
Geometric representation of a complex number



یک دایرۀ مثلثاتی را در نظر می گیریم(دایرۀ مثلثاتی دایره یی است که طول شعاع آن واحد طول باشد.) محور های قایم ox و oy دایره را در نقاط A ، B ، C و D قطع می کند، طوری که میدانید $OA = 1$ و $OB = -1$ است. می بینیم که نقاط C و D به کدام عدد ها مطابقت می کنند، بدین منظور نقطۀ C را به نقاط A و B وصل می کنیم. در مثلث قایم الزاویۀ $\overset{\Delta}{ABC}$ که OC ارتفاع آن بوده و از هندسه می دانیم $(OC)^2 = OA \cdot OB = (1)\cdot(-1) = -1$ وکتور واحد OC با i مساوی است که واحد طول می باشد. یا $OC = \sqrt{-1} = i$

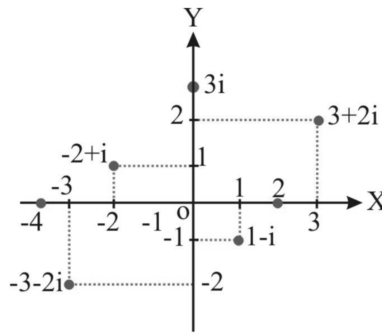
اعداد مختلط را می توانیم در سیستم مختصات دیکارتی به واسطۀ نقاط ارائه کنیم، طوری که محور افقی را محور حقیقی (Real Axis) محور قایم را محور موهومی (Imaginary Axis) یاد می کنند؛ بنابر آن قسمت حقیقی یک عدد مختلط را روی محور X وقسمت موهومی آن را روی محور Y نشان میدهند.

در سال 1806م یک ریاضی دان سویسی به نام (Jean Robert Argand) برای بار اول اعداد مختلط را در مستوی اعداد مختلط به شکل هندسی به واسطۀ نقاط نشان داد. از همین سبب نمایش هندسی اعداد مختلط در مستوی به نام (Argand Diagram) یاد می شود؛ بنابران عدد مختلط $z = a + bi$ را به واسطۀ جورۀ مرتب Order pair, (a,b) نمایش داده میتوانیم.

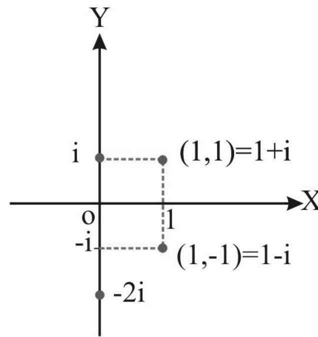


بنابران هر نقطۀ یک مستوی تنها نشان دهندۀ یک عدد مختلط و به همین ترتیب بالعکس هر عدد مختلط توسط یک نقطه در مستوی کمیات وضعیه نشان داده می شود. این بدان معنی است که بین اعداد مختلط و نقاط مستوی کمیات وضعیه مطابقت یک به یک (1-1) وجود دارد. نقاطی که بالای محور X واقع اند اعداد حقیقی و نقاطی که بالای محور Y قرار دارند اعداد موهومی را نشان می دهند.عدد مختلط $Z = a + bi$ به واسطۀ نقطه (a,b) در مستوی کمیات وضعیه مطابق شکل نمایش داده می شود.

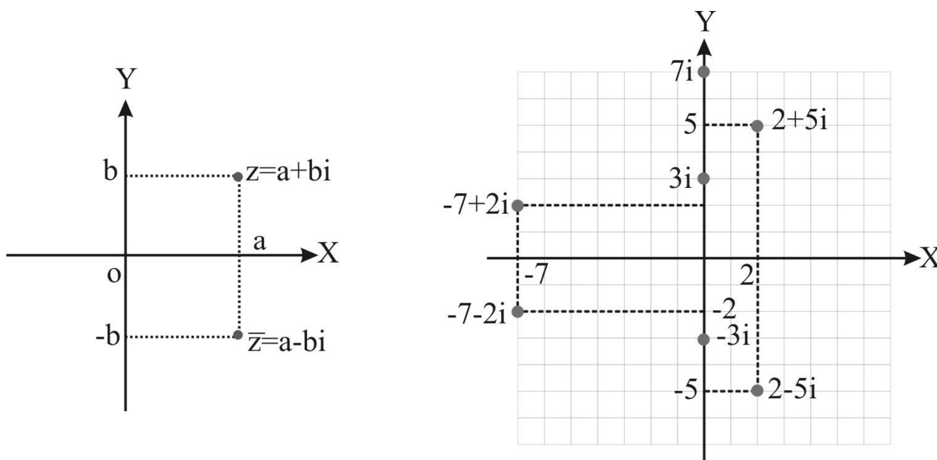
مثال 1.اعداد مختلط $2, 3i, -3-2i, -2+i, 1-i, 3+2i$ و 4- را در مستوی کمیات وضعیه طور زیر نشان داده می شود.



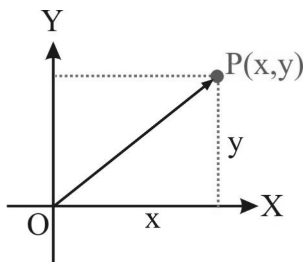
مثال2: اعداد $1-i, 1+i, -2i$ و i را طور زیر در شکل هندسی نشان داده می شود.



مثال3: اعدد مختلط $a+bi$, $2-5i$, $-7+2i$, $-3i$ و مزدوج های شان به طور هندسی در شکل زیر نشان داده شده است.



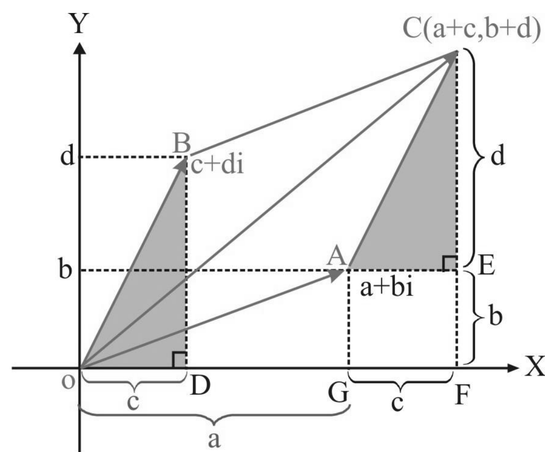
3- عملیه های چهار گانهٔ اعداد مختلط به شکل هندسی



طوری که قبلا یادآور شدیم، یک عدد مختلط را به واسطهٔ یک نقطه در مستوی اعداد مختلط نشان داده می توانیم. طوری که عدد مختلط $z=x+yi$ در شکل به واسطهٔ نقطهٔ (x,y) نشان داده شده است. اگر عدد مختلط z در مستوی به وکتور $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ یا به واسطهٔ خط $\overrightarrow{OP}$ نشان داده شود؛ پس اعداد مختلط را به شکل زیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم نموده می توانیم:

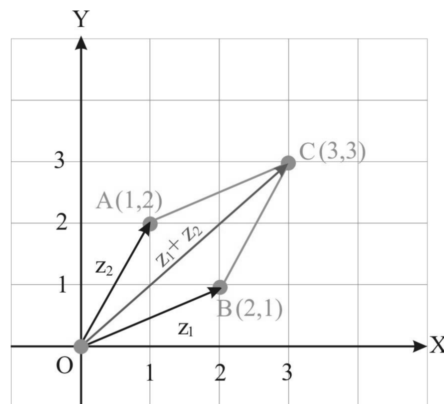
مثال1: اگر $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ باشد z_1+z_2 را به طور هندسی در شکل طور زیر نشان داده می شود.

$$Z_1+Z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$



مثال2: اگر $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 1+2i$ باشند، $z_1 + z_2$ را در شکل زیر مشاهده کنید.

$$z_1 + z_2 = (2+i)+(1+2i) = 3+3i$$

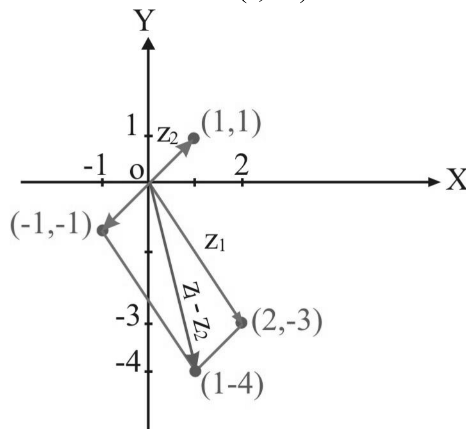


مشاهده می شود که قطر متوازی الاضلاع OACB حاصل جمع $Z_1 + Z_2$ را نشان می دهد.

$$OA = z_2 \quad , \quad OB = z_1 \quad , \quad OC = z_1 + z_2$$

مثال3: اگر $z_1 = 2-3i$ و $z_2 = 1+i$ باشد $z_1 - z_2$ را در شکل مشاهده کنید.

$$z_1 - z_2 = (2-3i)-(1+i) = 2-3i-1-i = 1-4i = (1,-4)$$

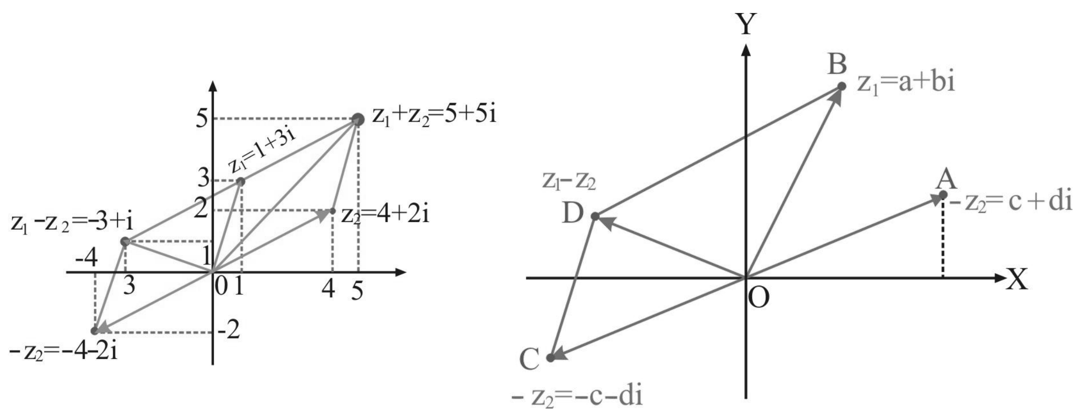


مثال4: اگر $z_1 = a+bi$ و $z_2 = c+di$ باشد $z_1 - z_2$ و اگر $z_1 = 1+3i$ و $z_2 = 4+2i$ باشد $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ را در شکل این طور نشان داده می توانیم:

$$z_1 - z_2 = (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

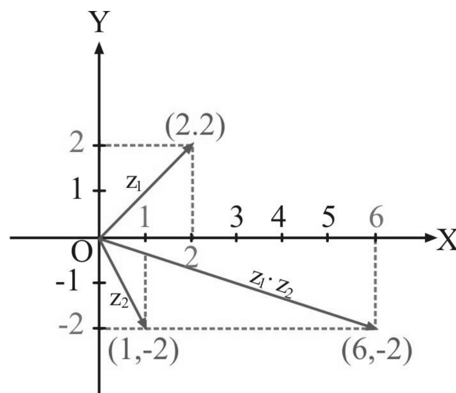
$$z_1 + z_2 = (1+3i)+(4+2i) = 5+5i$$

$$z_1 - z_2 = (1+3i)-(4+2i) = -3+i$$



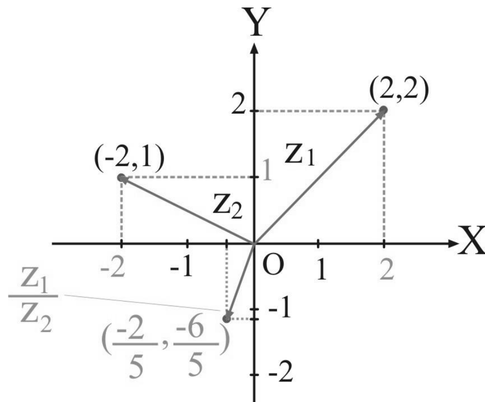
مثال5: اگر $z_1 = 2+2i$ و $z_2 = 1-2i$ باشد $z_1 \cdot z_2$ در شکل این طور نشان داده می شود:

$$z_1 \cdot z_2 = (2+2i)(1-2i) = 2-4i+2i-4i^2 = 2-2i+4 = 6-2i$$



مثال6: اگر $Z_1 = 2+2i$ و $Z_2 = -2+i$ باشد، $\frac{Z_1}{Z_2}$ را در شکل مشاهده کنید.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{2+2i}{-2+i}\right) \cdot \left(\frac{-2-i}{-2-i}\right) = \frac{-4-2i-4i-2i^2}{4+1} = \frac{-4-6i+2}{5} = \frac{-2-6i}{5} = \frac{-2}{5} - \frac{6}{5}i$$



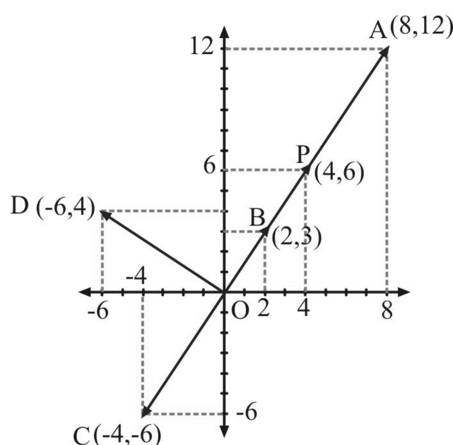
مثال7: اگر عدد مختلط $4+6i$ را در نظر بگیریم، اگر به ترتیب آن را در 2 , $\frac{1}{2}$ ، -1 و **i** ضرب شود، در دیاگرام Argand طور زیر نشان داده میشود.

$$2(4+6i) = 8+12i = (8,12)$$

$$\frac{1}{2}(4+6i) = 2+3i = (2,3)$$

$$-1(4+6i) = -4-6i = (-4,-6)$$

$$i(4+6i) = 4i+6i^2 = -6+4i = (-6,4)$$



دیده می شود که: $\vec{OB}=\frac{1}{2}OP$ و $\vec{OA}=2OP$

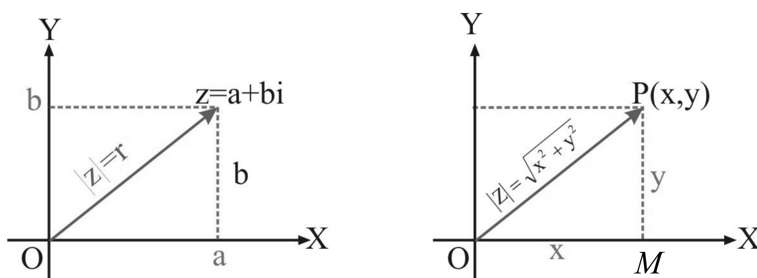
در نتیجه دیده می شود که اگر یک وکتور به (-1) ضرب شود به اندازهٔ $180°$ تغییر جهت می کند(می چرخد) در حالی که طول آن تغییر نمی کند. یا $\vec{OC}=-OP$ و اگر به $(-1)^2$ یا (1) ضرب شود وکتور به اندازهٔ $180°+180°=360°$ چرخ میخورد یاهیچ تغییر هم نمی کند.

4- قیمت مطلقهٔ یک عدد مختلط(Modulus of a complex number)

قیمت مطلقهٔ اعداد مختلط $Z_1=4+5i$ و $Z_2=-4-5i$ با هم مساوی می باشند. یا $|4+5i|\overset{?}{=}|-4-5i|$

در مستوی اعداد مختلط، عدد مختلط $Z=x+yi$ به طور زیر نشان داده شده است.

طول خط OP به نام قیمت مطلقهٔ عدد $Z=x+yi$ یاد می شود و این طور نشان داده می شود.



$|Z|=|OP|=|x+yi|$

به اساس قضیه فیثاغورث در مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{OPM}$ داریم که:

$(OP)^2=(OM)^2+(PM)^2$

$(OP)^2=x^2+y^2 \qquad \overline{PM}=y$ و $\overline{OM}=x$

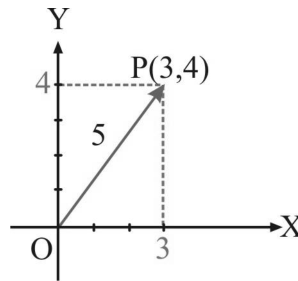
$(\overline{OP})^2=x^2+y^2$

$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

$|Z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$

مثال 1: اگر $Z=3+4i$ باشد، $|Z|$ عبارت است از:

$|Z|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$



مثال 2: قیمت مطلقهٔ اعداد مختلط $2i$ ، $-2i$ و 4 مساوی است به:

$$|2i| = |0+2i| = \sqrt{(0)^2+(2)^2} = \sqrt{0+4} = 2$$

$$|-2i| = |0-2i| = \sqrt{(0)^2+(-2)^2} = \sqrt{0+4} = 2$$

$$|4| = |4+oi| = \sqrt{(4)^2+(0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

مثال 3: اگر $|Z|=1$ باشد، معادلهٔ نقاطی که این شرط را صدق می کند.

$|Z|=1$ عبارت از ستی تمام نقاطی است که بالای محیط دایـره یـی واقـع باشـند کـه مرکز آن در مبدای کمیات وضعیه و شعاع آن یک واحد می باشد.

اگر $Z=x+yi$ باشد $|Z|^2 = x^2+y^2$ می باشد.

که معادلهٔ این دایره است.

مثال 4: اگر $Z=5+4i$ باشد $|Z| = Z\overline{Z} = \sqrt{x^2+y^2}$ می باشد.

مزدوج عدد مختلط Z عبارت است از $\overline{Z}=5-4i$ پس:

در نتیجه: $|Z| = |5+4i| = \sqrt{(5+4i)(5-4i)} = \sqrt{25-20i+20i-16i^2} = \sqrt{25-16(-1)} = \sqrt{41}$

$$|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

خاصیت های قیمت مطلقهٔ اعداد مختلط

1) $|Z_1|+|Z_2| \geq |Z_1+Z_2|$

2) $|Z_1|-|Z_2| \leq |Z_1-Z_2|$

3) $|Z_1-Z_2| = |Z_2-Z_1|$

4) $|Z_1|\cdot|Z_2| = |Z_1\cdot Z_2|$

5) $\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|} = \left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| \qquad Z_2 \neq 0$

6) $|-Z| = |Z| = |\overline{Z}| = |-\overline{Z}|$

7) $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$

8) $|Z|^2 = Z\overline{Z}$

مثال 1: اگر $Z_1=4+5i$ و $Z_2=2+3i$ باشد پس $|Z_1-Z_2| = |Z_2-Z_1|$

$$|z_1-z_2| = |4+5i-(2+3i)| = |4+5i-2-3i| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|z_2-z_1| = |2+3i-4-5i| = |-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore |z_1-z_2| = |Z_2-Z_1| = 2\sqrt{2}$$

مثال 2: اگر $z=x+5i$ و $|z|=49$ باشد قیمت x عبارت است از:

$|z| = x^2 + 25 \qquad x^2 + 25 = 49$

$x^2 = 49 - 25$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

مثال3: اگر $z = 2 - 3i$ باشدپس $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ و $|z|^2 = z\overline{z}$

$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\overline{z} = 2 + 3i$

$\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(2-3i)(2+3i)} = \sqrt{4 + 6i - 6i + 9} = \sqrt{13}$

$|z|^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$

$z\overline{z} = (2+3i)(2-3i) = 13 \qquad |z|^2 = z\overline{z}$

حل تمرین فصل

-1 $(i)^{51}$ مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

حل:

$$(i)^{51} = (i)^{4\cdot 12+3} = i^{4\cdot 12}\cdot i^2\cdot i = (1)(-1)i = -i$$

جواب درست جزء d میباشد.

-2 عدد موهومی i^{-98} مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

حل:

$$i^{-98} = \frac{1}{i^{98}} = i^{-(4\cdot 24+2)} = \frac{1}{i^{(4\cdot 24+2)}} = \frac{1}{i^{4\cdot 24}\cdot i^2} = \frac{1}{(1)(-1)} = -1$$

جواب درست جزء b میباشد.

-3 عدد موهومی i^{67}مساوی است به:

:a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

$$i^{67} = i^{4\cdot 16+3} = i^{4\cdot 16}\cdot i^2\cdot i = 1\cdot(-1)i = -i$$

جواب درست جزء a می باشد.

-4 $7i-4i$ مساوی است به:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

حل: جزء b می باشد یعنی $3i$.

-5 $3i\cdot 4i$ مساوی است به:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

حل: $12-$ جزء a درست است.

-6 $\frac{64i}{8i}$مساوی است به:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

حل: جزء b صحت دارد یعنی جواب درست عدد (8) می باشد.

-7 $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوی است به:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

حل:

$$\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i = \frac{14}{81}i^2 = -\frac{14}{81}$$

جزء a درست است.

8- $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوی است به:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $-\frac{11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

حل:

$$\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{11}\sqrt{-1}}{\sqrt{5}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{11}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{11}{5}}$$

جزء a صحت دارد.

9- $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوی است به:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) هر سه جزء درست نیست

حل:

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}i}{5i} = \frac{\sqrt{5}i}{5i}(\frac{-5i}{-5i}) = \frac{-5\sqrt{5}i^2}{-25i^2} = \frac{5\sqrt{5}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

جزء a درست است.

10- $\frac{-xi}{\sqrt{yi}}$ مساوی است به:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

حل: جزء b درست است.

11- اعداد مختلط زیر را باهم جمع کنید.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)\ +(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

حل:

a) $(3+4i)+(2+5i)=(2+3)+(4+5)i=5+9i$

b) $(1+i)+(1-i)=2-0=2+0i$

c) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

d) $(2+3i)+(2-3i)=4-0=4+0i$

12- اعداد مختلط زیر را تفریق نمایید:

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

حل:

a) $(4+3i)-(4+4i)=(4-4)+(3-4)i=0-i=-i$

b) $(4+4i)-(4+3i)=(4-4)+(4-3)i=0+i=-i$

c) $(3-2i)-(3+2i)=3-2i-3-2i=0-4i=-4i$

d) $(1+i)-(1-i)=1+i-1+i=2i$

13- $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوی است به:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

حل: $(2a + ib) - (2a - ib) = 2a + ib - 2a + ib = 2ib$

جزء c درست است.

14- حاصل ضرب $(2-3i)(3+3i)$ مساوی است به:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

حل: $(2-3i)(2+3i) = 4 + 6i - 6i - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 = 9 = 13$

جزء c درست است.

15- اعداد مختلط زیر را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$4(2+5i) - (3-4i)$ و $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ و i^{51}

حل:

a) $4(2+5i) - 3(3-4i) = 8 + 20i - 9 + 12i = -1 + 32i$

b) $(4-3i)(2+i) = 8 + 4i - 6i - 3i^2 = 8 - 2i + 3 = 11 - 2i$

c) $i(3-2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = 9i - 12i^2 - 4i = 5i + 12 = 12 + 5i$

d) $i^{51} = i^{4 \cdot 12 + 3} = 1^{4 \cdot 12} \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i = 0 - i$

16- اگر $z_2 = 1 - i \,,\, z_1 = 2 - 4i$ باشد نشان دهید که:

$a)\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $b)\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $c)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

حل:

$a)\quad z_1 + z_2 = (2-4i) + (1-i) = 3 - 5i$

$\overline{z_1 + z_2} = 3 + 5i$

$z_1 = 2 - 4i \Rightarrow \overline{z_1} = 2 + 4i$

$z_2 = 1 - i \Rightarrow \overline{z_2} = 1 + i$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (2+4i) + (1+i) = 3 + 5i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$b)\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$z_1 \cdot z_2 = (2-4i)(1-i) = 2 - 2i - 4i + 4i^2 = -2 - 6i$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = -2 + 6i$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (2+4i)(1+i) = 2 + 2i + 4i + 4i^2 = 2 + 6i - 4 = -2 + 6i \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$c: \overline{\left(\frac{2-4i}{1-i}\right)} = ?$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{1-i} = \frac{(2-4i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{2 + 2i - 4i - 4i^2}{1+1} = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3 - i \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 3 + i$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{(2+4i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{2 - 2i + 4i - 4i^2}{1+1} = \frac{6+2i}{2} = 3 + i \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17- معکوس جمعی ومعکوس ضربی اعداد مختلط زیر را در یابید:

$3x-\frac{1}{2}yi \quad , \quad 2a-bi \quad , \quad 2+5i \quad , \quad -7+3i \quad , \quad -6+2i \quad , \quad 3-i \quad , \quad \sqrt{2}+i$

حل:

$a)\ 3x-\frac{1}{2}yi \qquad b)\ 2a-bi \qquad c)\ 2+5i \qquad d)\ -7+3i$

$e)\ -6+2i \qquad f)\ 3-i \qquad g)\sqrt{2}+i$

حل:

a)معکوس جمعی $3x-\frac{1}{2}yi$ عبارت از $-3x+\frac{1}{2}yi$ می باشد ومعکوس ضربی آن عبارت است از:

$$\frac{1}{3x-\frac{1}{2}yi}\left(\frac{3x+\frac{1}{2}yi}{3x+\frac{1}{2}yi}\right)=\frac{3x+\frac{1}{2}yi}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}=\frac{3x}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}+\frac{\frac{1}{2}y}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}i$$

b)معکوس جمعی $2a-bi$ عبارت از $-2a+bi$ می باشد ومعکوس ضربی آن:

$$\frac{1}{2a-bi}\left(\frac{2a+bi}{2a+bi}\right)=\frac{2a+bi}{4a^2+b^2}=\frac{2a}{4a^2+b^2}+\frac{b}{4a^2+b^2}i$$

c)معکوس جمعی $2+5i$ عبارت از $-2-5i$ ومعکوس ضربی آن:

$$\frac{1}{2+5i}\cdot\left(\frac{2-5i}{2-5i}\right)=\frac{2-5i}{4+25}=\frac{2-5i}{29}=\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$$

d) معکوس جمعی -7+3i عبارت از 7-3i می باشد و معکوس ضربی آن:

$$(\frac{1}{-7+3i})\cdot\left(\frac{-7-3i}{-7-3i}\right)=\frac{-7-3i}{49+9}=\frac{-7}{58}-\frac{3}{58}i$$

e) معکوس جمعی -6+2i عبارت از 6-2i می باشد و معکوس ضربی آن عبارت است از:

$$\frac{1}{-6+2i}\cdot\left(\frac{-6-2i}{-6-2i}\right)=\frac{-6-2i}{40}=\frac{-6}{40}-\frac{2}{40}i=-\frac{3}{20}-\frac{1}{20}i$$

f) معکوس جمعی 3-i عبارت از -3+i می باشد و معکوس ضربی آن عبارت است از:

$$(\frac{1}{3-i})(\frac{3+i}{3+i})\frac{3+i}{10}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

g) معکوس جمعی $\sqrt{2}+i$ عبارت از $-\sqrt{2}-i$ می باشد و معکوس ضربی آن:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}+i})\cdot(\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i})=\frac{\sqrt{2}-i}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}i$$

18- معادله $5x^2+2x+1=0$ را حل کنید.

حل:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{10}=\frac{-2\pm 4i}{10}=-\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$$

$$x_1=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i \qquad x_2=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

فصل هفتم
هندسه تحلیلی

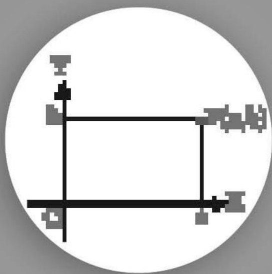
هندسهٔ تحلیلی علمی است که تخنیک های الجبر را باهندسه یکجا می کند؛ یا به عبارهٔ دیگر هندسهٔ تحلیلی ما را قادر می سازد که در حل مسائل هندسی از میتود ها و معادلات الجبری استفاده نماییم و همچنین از اصول هندسی در مساوات های الجبری استفاده نماییم.

هندسه یکی از قدیمی ترین شاخهٔ الجبر بوده، یونانی ها تقریباً چهار قرن قبل در این مورد به طور منظم تحقیق و مطالعه کردند که تقریباً (300) سال قبل توسط ایوکلید (Euclid) سیزده (13) جلد کتاب تشریح و تفسیر شده بود.

اختراع هندسه تحلیلی توسط یک عالم فرانسوی رین دکارتس (Rene Descartes) که در سال های (1650-1596 ب.م) زنده گی می کرد صورت گرفت که میتود های الجبری را در هندسه معرفی و از آن استفاده کرد که به نام هندسهٔ تحلیلی (Analytic geometry) یا هندسه همآهنگ (Coordinate geometry) یاد می شود.

نامبرده در سال (1637 م) یک نسخه را به نام (La geometry) تحریر کرد.

خلص این که چطور از هندسه و الجبر یکجا استفاده می شوند در این فصل هدف ما این است که به طور خلص اساسات این مضمون را مطالعه نماییم.



سیستم کمیات وضعیه یا سیستم کواردنت

صفحهٔ کتاب (305)　　وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی	شاگردان در اخیر این درس باید:
- دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• مثبت و منفی بودن کمیات وضعیه یک نقطه را تشخیص کند. • نقاط که کمیات وضعیه آن ها داده شده باشند در مستوی کواردنت تعین کرده بتوانند و بیآموزند که در کدام وقت یکی از مختصات نقاط مستوی، صفر می باشد. • فورمول دریافت فاصله بین دو نقطه را ثبوت کرده بتوانند. • فاصله بین دو نقطه را در یافت کرده بتوانند. • در حل مسایل هندسی از این فورمول ا ستفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. (-4,7)　(2,2)　(-2,0)　(2,0)　(0,-1)

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

محور های x وy به شاگردان معرفی و توضیح شود که مختصات xو y در کدام حالت مثبت، منفی و صفر می باشد.

مثال اول با سهم گیری شاگردان حل شود.

شاگردان فعالیت اول درس را اجرا کنند و استاد محترم آن ها را رهنمایی و همکاری نماید. بعد از ثبوت فورمول فاصله، مثال (2) را با سهم گیری شاگردان حل نمایید.

فعالیت دوم درس را از شاگردان بپرسید که جواب آن 6 می باشد. و مثال سوم را حل کنید.

فعالیت سوم را شاگردان اجرا کنند،که حل آن طور زیر می باشد:

$$|AB|^2 = (3+6)^2 + (-5-3)^2 = 81 + 64 = 145$$
$$|BC|^2 = (3+1)^2 + (-5-5)^2 = 61 + 100 = 116$$
$$|CA|^2 = (-6+1)^2 + (-5-3)^2 = 25 + 4 = 29$$
$$|BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$$

مثال (4) را باسهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

این سؤال حل شود: فاصله بین نقاط (5,7) و (1,3) را دریابید. (جواب $4\sqrt{2}$) می باشد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

قسمتی از سؤال اول تمرین از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

- فاصله بین نقاط $(-\pi, \sqrt{2})$ و $(\pi, \sqrt{2})$ عبارت است از:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - \pi)^2 + (-\pi - \sqrt{2})^2}$$
$$d = \sqrt{2 - 2\sqrt{2}\pi + \pi^2 + \pi^2 + 2\sqrt{2}\pi + 2} = \sqrt{4 + 2\pi^2}$$

- با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه مسایل زیادی هندسی حل می گردد؛ طور مثال:

1- اگر سه راس یک مستطیل عبارت از A(3,0) , B(3,3) و C(5,3) باشد راس چهارم این مستطیل عبارت است از:

$$|AB|^2 = |DC|^2$$
$$(3-3)^2 + (3-0)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2$$
$$9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

همچنین:

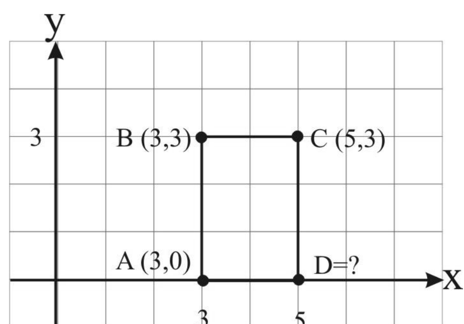
$$|AD|^2 = |BC|^2$$
$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = (5-3)^2 + (3-3)^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

معادله II را از معادله I تفریق می کنیم داریم که:

$$-4x - 6y + 20 = 0$$
$$2x + 3y - 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{10 - 2x}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots III$$

قیمت y را در معادله(I) وضع می نماییم داریم که: $13x^2 - 94x + 145 = 0$

بعد از حل این معادله داریم که x=5 و قیمت x را در معادله (III) وضع می نماییم در نتیجه y=0 می شود. پس رأس چهارم مستطیل عبارت از D=(5,0) می باشد.



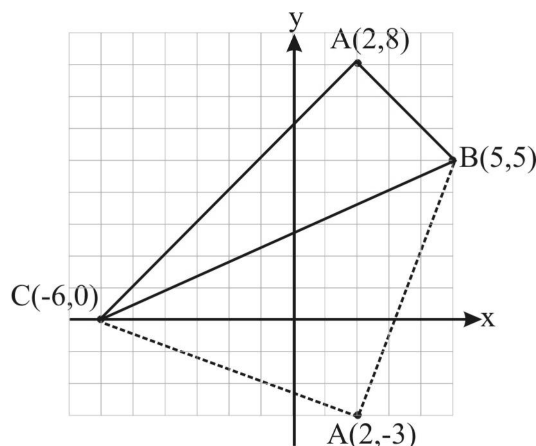
2- توسط فورمول فاصله نشان داده شده می تواند که نقاط A(3,1) , B(6,2) و C(9,3) بالای یک خط مستقیم قرار دارند. اگر نقاط C,B,A بالای یک خط مستقیم قرار داشته باشد باید شرط $|AB|+|BC|=|AC|$ را صدق کند.

$$|AB|=\sqrt{(6-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$|BC|=\sqrt{(9-6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$|AC|=\sqrt{(9-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$\sqrt{40}=\sqrt{10}+\sqrt{10}$$
$$2\sqrt{10}=\sqrt{10}+\sqrt{10}$$
$$|AB|+|BC|=|AC|$$

در نتیجه نقاط A,B و C روی یک خط مستقیم قرار دارند.

3- اگر A(2,p) , B(5,5) و C(−6,0) راس های مثلث یک قایم الزاویه باشند در صورتی که نقطه A راس زاویه قایمه باشد قیمت p مساوی است به:

$$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$$
$$(5-2)^2+(5-p)^2+(-6-2)^2+(0-p)^2$$
$$=(-6-5)^2+(0-5)^2$$
$$=9+25+p^2-10p+64+p^2=121+25$$
$$=2p^2-10p-146+64+25+9=0$$
$$=p^2-5p-24=0$$
$$(p-8)(p+3)=0$$
$$p=8 \quad , \quad p=-3 \Rightarrow A(2,8)$$



جواب به سؤال های تمرین

1- در نقاط داده شدهٔ زیر فاصلهٔ کدام نقطه از مبدای کمیات وضعیه 15 واحد می باشد؟

$a:(\sqrt{176},7) \qquad b:(10,-10) \qquad C:(1,15) \qquad d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(\sqrt{176}-0)^2+(7-0)^2}$$

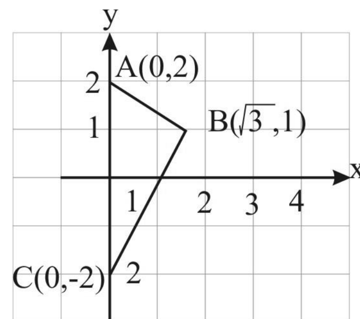
حل:

$$d=\sqrt{(\sqrt{176})^2+7^2}=\sqrt{176+49}=\sqrt{225}=15$$

فاصله نقطه $(\sqrt{176},7)$ از مبدأ کمیات وضعیه 15 واحد است.

2- نشان دهید که نقاط $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ و $C(0,-2)$ رأس های مثلث قایم الزاویه می باشند.

حل:



$$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{3+1}=2$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(0-0)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16}=4$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(-2-1)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$$
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(2)^2+(\sqrt{12})^2=4+12=16=\overline{AC}^2$$

پس مثلث ABC قایم الزاویه می با شد.

3- فاصله بین نقاط $(0,5)$ و $(0,-3)$ را دریابید.

حل: $d=\sqrt{(0-0)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{0+64}=8$

4- فاصله بین نقاط $A(-\frac{1}{2},3)$ و $B(-1,\frac{-3}{4})$ را دریابید.

حل:

$$d=\sqrt{[-1-(\frac{-1}{2})]^2+(\frac{-3}{4}-3)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{229}{16}}=\frac{\sqrt{229}}{4}$$

یا

$$d=\sqrt{(-\frac{1}{2}+1)^2+(3+\frac{3}{4})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(\frac{15}{4})^2}=\frac{\sqrt{229}}{4}$$

5- فاصله بین نقاط $(7,11)$ و $(1,3)$ را دریابید.

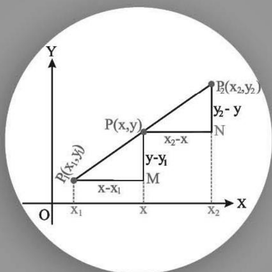
حل: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(11-3)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

6- فاصله بین نقاط $(3,6)$ و $(1,2)$ را دریابید.

حل: $d=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$

7- فاصله بین نقاط $(3,7)$ و $(12,19)$ را دریابید.

حل: $d=\sqrt{(12-3)^2+(19-7)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=25$



دریافت کمیات وضعیه نقطه یی که
یک قطعه خط را به یک نسبت تقسیم می کند

صفحهٔ کتاب (311)   وقت تدریس(1ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن کمیات وضعیهٔ نقطه یی که یک قطعه خط را به یک نسبت معین تقسیم می کند بیآموزند. • بیآموزند که اگر نقطه، خط داده شده را داخلاً به یک نسبت تقسیم نماید نسبت r مثبت $(r>0)$ و اگر قطعه خط را خارجاً تقسیم نماید $(r<0)$ می باشد. • کمیات وضعیهٔ نقطه یی را که یک قطعه خط را داخلاً یا خارجاً تقسیم می نماید دریافت کرده بتوانند، و کمیات وضعیه نقطه تنصیف یک قطعه خط را نیزدریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل هندسی از این فورمول ها استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی و انفرادی...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود. $x=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ $y=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

در صورتیکه چارت شکل قسمت ورودی موجود باشد فورمول $x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$ و $y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$ را ثبوت کنید و مثال های (1) و(2) را باسهم گیری شاگردان حل کنید. فعالیت صفحه (313) را شاگردان حل کنند و استاد محترم آنها را رهنمایی و همکاری نماید که حل آن قرار زیر می باشد:

اگر $A(4,6)=(x_1y_1)$ و $B(-2,3)=(x_2y_2)$ باشد:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}}=2 \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+\frac{1}{2}(3)}{1+\frac{1}{2}}=5 \Rightarrow p(2,5)$$

همچنین مثال سوم را نیز باسهم گیری شاگردان حل کنید تا طریق یافتن کمیات وضعیه نقطه تنصیف یک قطعه خط را بیآموزند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال زیر حل شود.

کمیات وضعیهٔ نقطه تنصیف خطوط مستقیمی را که از جوره های نقاط داده شده زیر میگذرد را در یابید.

$a: \ (-1,3)\ ,(11,3) \qquad b: \ (3,-2)\ ,(-4,3) \qquad c: \ (100,-50),(-100,50)$

$d: \ (5,4)\ ,(-\frac{1}{2}),\frac{1}{2}) \qquad e: \ (0,0)\ ,(8,-1)$

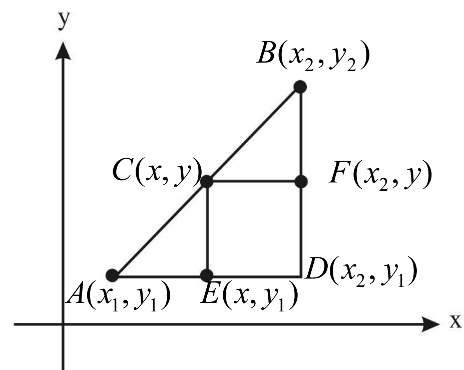
ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

کمیات وضعیه نقطه تنصیف قطعه خطی را که از نقاط $(-2,-5)$و $(18,3)$ می گذرد را دریابید.

جواب $M(8,-1)$

معلومات اضافی برای معلم

طریق دوم به دست آوردن کمیات وضعیه نقطه یی که یک قطعه خط را به یک نسبت معین تقسیم می کند.



$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{EC}=\frac{1+r}{r}$$

$$\frac{AD}{AE}=\frac{1+r}{r}\Rightarrow\frac{AD}{AE}-1=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{AD-AE}{AE}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{ED}{AE}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{AE}{ED}=r\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\frac{BD}{EC}=\frac{1+r}{r}\Rightarrow\frac{BD}{EC}-1=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{BD-EC}{EC}=\frac{1}{r}$$

$$EC=DF$$

$$\Rightarrow\frac{BD-DF}{DF}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{BF}{DF}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{DF}{BF}=r\ldots\ldots\ldots(II)$$

از معادله(I)داریم که:

$$\frac{AE}{ED}=r\Rightarrow\frac{x-x_1}{x_2-x}=r\Rightarrow x-x_1=r(x_2-x)\Rightarrow x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

از معادله(II) داریم که:

$$\frac{DF}{FB}=r\Rightarrow\frac{y-y_1}{y_2-y}=r\Rightarrow y-y_1=r(y_2-y)\Rightarrow y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

جواب به سؤال های تمرین

1- کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی خط مستقیم $\overline{AB}$ ،عبارت از $(2,-1)$ می باشد، اگر نقطه $A(-1,-3)$ باشد کمیات وضعیهٔ نقطهٔ B را دریابید.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$2=\frac{-1+x_2}{2}\Rightarrow 4=-1+x_2\Rightarrow x_2=5$$

$$-1=\frac{-3+y_2}{2} \Rightarrow -2=-3+y_2 \Rightarrow y_2=1$$

کمیات وضعیه نقطه B عبارت از (5.1) می باشد.

2- کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی قطعه خط را که از نقاط $A(3,1)$ و $B(-2,-4)$ می گذرد دریابید.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

کمیات وضعیه نقطه وسطی خط مستقیم AB عبارت از $(\frac{1}{2},\frac{-3}{2})$ می باشد.

3- کمیات وضعیهٔ نقطه یی را دریابید که قطعه خط که از نقاط $A(4,6)$ و $B(-2,3)$ می گذرد.

a: داخلاً به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کند. b: خارجاً به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کند.

حل:

a)

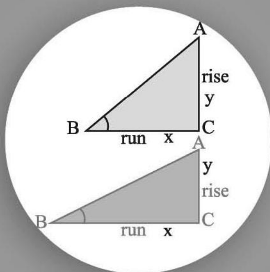
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+(\frac{1}{2})(-2)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2 \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+(\frac{1}{2})(3)}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{3}=5$$

نقطه (2,5) قطعه خط AB را داخلا به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می کند.

b) چون $r<0$ می باشد.

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+(-\frac{1}{2})(-2)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{\frac{1}{2}}=5\cdot 2=10 \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+(\frac{-1}{2})3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{1}=9$$

کمیات وضعیه نقطهٔ که قطعه خط AB را به نسبت $\frac{1}{2}$ خارجاً تقسیم می کند عبارت از (10,9) می باشد.



میل یک خط مستقیم

(Slope of a Straight-line)

صفحۀ کتاب (315) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان در اخیر این درس باید:
• زاویۀ میل یک خط مستقیم را بشناسند.
• بیآموزند که چه وقت میل یک خط مستقیم مثبت، منفی وصفر می باشد.
• فورمول میل یک خط مستقیم را به دست آورده بتوانند.
• بیآموزند که میل خط مستقیم در تمام نقاط خط مستقیم باهم مساوی می باشند.
• بیآموزند که میل های خطوط موازی باهم مساوی و حاصل ضرب میل های خطوط عمود(-1) می شوند.
• میل خط مستقیمی راکه دو نقطۀ آن معلوم باشد در یافت کرده بتوانند.
• در حل مسایل ریاضی از فورمول میل یک خط مستقیم استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی و انفرادی و...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت و...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود.
میل سطح اولی زیاد است نسبت به سطح دومی؛ زیراکه زاویۀ میل آن بزرگتر است نسبت به زاویه میل سطح دومی.</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
از روی چارت و یا به روی تخته نشان داده شود که زاویه میل محور X و تمام خطوط که با محور X موازی باشند صفر است و زاویه میل محور y و تمام خطوط که با محور y موازی باشند (90°) می باشد و نیز توضیح گردد که چه وقت میل یک خط مستقیم مثبت، منفی و چه وقت صفر می باشد.
فعالیت اول این درس از شاگردان پرسیده شود که جواب آن این است (میل محور x صفر و میل محور y تعریف نه شده است.)
فورمول میل یک خط مستقیم در شکل یا از روی چارت و یا از روی تخته ثبوت شود.
مثال های اول و دوم با سهم گیری شاگردان حل شود فعالیت دوم این درس را شاگردان در گروپ هاحل کنند که حل آن قرار زیرمی باشد.</td></tr>
</table>

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-1}{-2-5}=\frac{-3}{8}$$

اگر $A(4,-5)$, $B(7,5)$ و $C(10,15)$ باشند:

$$m_{AB}=\frac{5+5}{7-4}=\frac{10}{3} \qquad m_{BC}=\frac{15-5}{10-7}=\frac{10}{3}$$

در نتیجه نقاط B,A و C روی عین خط مستقیم قرار دارند.

میل های خطوط موازی و عمود از روی شکل توضیح نموده، همچنان شرح کنید که میل یک خط مستقیم چی وقت مثبت، منفی و صفر می باشد و چی وقت تعریف نه شده است.

تحکیم درس (7) دقیقه

سؤالات زیر را حل کنید.

1- میل خطوط مستقیمی را که از نقاط داده شدهٔ زیر می گذرد دریابید.

$(3,-5)$ و $(-3,-2)$ ← جواب $m=\frac{1}{2}$

$(\sqrt{2},8)$ و $(3,8)$ ← جواب $m=0$

2- به کدام قیمت k دو خط مستقیم متقاطع که از نقاط $(-2,5),(4,3)$ و $(-3,7),(6,k)$ میگذرد با هم عمود می شوند؟ جواب: $k=34$

ارزیابی ختم درس:(5) دقیقه

میل خط مستقیمی را که از نقاط $(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ و $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ می گذرد دریابید. (جواب $m=2$)

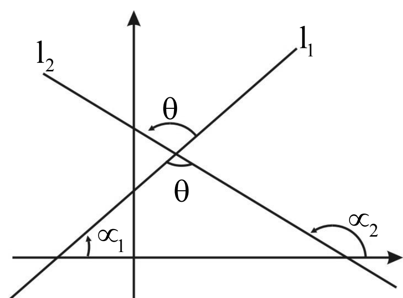
معلومات اضافی برای معلم

- میل یک خط مستقیم مساوی است به:

$$m=\frac{\text{vertical Change}}{\text{Horizontal change}}=\frac{\text{change in y}}{\text{change in x}}$$

(تغییر عمودی / تغییر افقی = تغییر در y / تغییر در x)

- زاویه بین دو خط متقاطع (Angle Between tow straight lines): اگر α_1 و α_2 زوایایی میل خطوط l_1 و l_2 و θ زاویه بین دوخط متقاطع از l_1 به l_2 باشد.



$$\theta+\alpha_1=\alpha_2$$
$$\theta=\alpha_2-\alpha_1$$
$$\tan\theta=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$$
$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1-\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

و برای زاویه حاده:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$$

1- اگر خطوط l_1و l_2 باهم موازی باشند $\theta = 0^\circ$ می شود.

$\tan 0^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2} \Rightarrow 0 = m_2 = m_1$ یا $m_1 = m_2$ می شود.

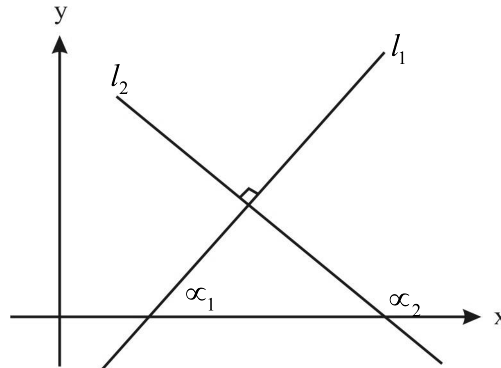
2- اگر خطوط l_1 و l_2 با هم دیگر عمود باشند $\theta = 90^\circ$ می شود.

تعریف نشده است $\tan 90^\circ$

$$\tan 90^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2} \Rightarrow 1+m_1m_2 = 0 \Rightarrow m_1m_2 = -1$$

- دو خط l_1و l_2 وقتی که با همدیگر عمود می باشند حاصل ضرب میل های شان (-1) می شود.

ثبوت:



$$\propto_2 = 90^\circ + \propto_1$$

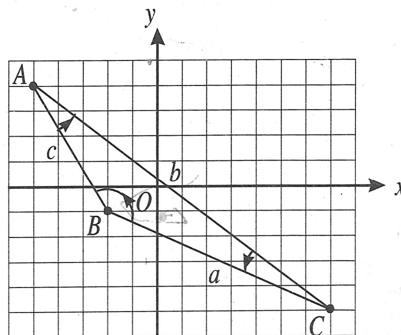
$$\tan \propto_2 = \tan(90^\circ + \propto_1) = -\cot \propto_1 = \frac{-1}{\tan \propto_1}$$

$$\tan \propto_1 \cdot \tan \propto_2 = -1 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

مثال: در صورتی که زوایای مثلثی که رأس های آن $C(7,-5)$, $B(-2,-1)$, $A(-5,4)$باشد:

اگر میل اضلاع BC,AB و CA را به ترتیب m_c, m_a , m_b نشان دهیم سپس داریم که:

$$m_a = \frac{-5+1}{7+2} = -\frac{4}{9} \qquad m_c = \frac{4+1}{-5+2} = -\frac{5}{3} \qquad m_b = \frac{-5-4}{7+5} = \frac{-3}{4}$$



زاویهٔ A از AB به AC عبارت است از: $\tan A = \frac{m_b - m_c}{1+m_bm_c} = \frac{-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}}{1+(-\frac{3}{4})(-\frac{5}{3})} = \frac{11}{27} \Rightarrow A = 22.2^\circ$

زاویهٔ B از BC به BA عبارت است از: $\tan B = \frac{m_c - m_a}{1+m_cm_a} = \frac{-\frac{5}{3}+\frac{4}{9}}{1+(-\frac{5}{3})(-\frac{4}{9})} = \frac{-33}{7} \Rightarrow B = 144.9^\circ$

زاویهٔ C از CA به CB عبارت است از: $\tan C = \frac{m_a - m_b}{1+m_am_b} = \frac{-\frac{4}{9}+\frac{3}{4}}{1+(-\frac{4}{9})(-\frac{3}{4})} = \frac{11}{48} \Rightarrow C = 12.9^\circ$

مثال: زاویه یی که از خطی که میل آن $-\frac{7}{3}$ به خطی که میل آن $\frac{5}{2}$ باشد عبارت است از:

در این جا $m_2 = \frac{5}{2}$ و $m_1 = \frac{-7}{3}$ می باشد، اگر θ زاویهٔ از l_1 به l_2 باشد؛ پس

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{5}{2} - (\frac{-7}{3})}{1 + \frac{5}{2}(\frac{-7}{3})} = \frac{29}{-29} = -1$$

پس $\theta = 135$ درجه می باشد.

مثال: اگر میل های دو خط مستقیم $\frac{1}{2}$ و 3 باشد وسعت زاویه از l_1 به l_2 عبارت است از:

حل:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ = (\frac{\pi}{4})^R$$

مثال: اگر خط مستقیم l_1 از نقاط $(1,2)$ و $(7,-1)$ و خط l_2 از نقاط $(3,2)$ و $(5,6)$ بگذرد. زاویه بین این دو خط متقاطع از l_1 به l_2 عبارت است از:

$$m_1 = \frac{-1-2}{7-1} = -\frac{1}{2} \qquad m_2 = \frac{6-2}{5-3} = 2$$

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{2}}{0} = \infty \Rightarrow \theta = 90^\circ = (\frac{\pi}{2})^R$$

دو یا سه خط مستقیم

- اگر دو خط l_1, l_2 جدا از همدیگر (distinct lines) داشته باشیم یکی از سه حالات موجود شده می تواند.

1- موازی اند. 2- عمود با هم دیگر اند. 3- نه موازی و نه عمود اند.

معادله خط مستقیم l_1 عبارت از $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و معادله خط مستقیم l_2 عبارت از $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ می باشد. پس میل خط مستقیم l_1 عبارت از: $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ و میل خط l_2 عبارت از: $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ می باشد.

1- اگر $l_1 \parallel l_2$ باشد:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$ (شرط موازی بودن دو خط مستقیم)

2- اگر $l_1 \perp l_2$ باشد:

$$m_1m_2 = -1 \qquad (-\frac{a_1}{b_1})(-\frac{a_2}{b_2}) = -1 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$ (شرط عمود بودن دو خط مستقیم)

3- اگر دو خط مستقیم نه موازی و نه عمود باشند پس خطوط متقاطع اند.

کمیات وضعیه نقطه تقاطع دو خط مستقیم

در صورتی که دو خط مستقیم l_1 و l_2 باهم موازی نباشند $(a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0)$ پس:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$............I معادله خط l_1

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$............II معادله خط l_2

اگر $P(x_1, y_1)$ کمیات وضعیه نقطه تقاطع خطوط مستقیم l_1 و l_2 باشد از حل همزمان معادلات فوق داریم که:

$$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \Rightarrow p(x_1y_1) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

مثال: کمیات وضعیهٔ نقطه تقاطع خطوط مستقیم $5x+7y=35$ و $3x-7y=21$ عبارت اند از:

از حل معادلات داریم که $x=7$ و $y=0$ می شود یعنی این دو خط مستقیم در نقطه $(7,0)$ با هم متقاطع اند.

مثال: کمیات وضعیه نقطه تقاطع خطوط مستقیم $2x+4y-10=0$ و $5x-3y+1=0$ عبارت اند از:

$$(x, y) = \left(\frac{(4)(1) - (-3)(-10)}{(2)(-3) - (5)(4)}, \frac{(5)(-10) - (2)(1)}{(2)(-3) - (5)(4)}\right) = (1,2)$$

نوت: در صورتی که دو خط موازی باشند این سیستم حل ندارد یا $(a_1b_2 - a_2b_1 = 0)$ می باشد.

شرط تقاطع سه خط مستقیم: اگر:

$$l_1: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$l_3: \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

این سه خط مستقیم در صورتی متقاطع می باشد که:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

اگر خطوط l_1 و l_2 باهم موازی نباشند؛ پس در نقطه (x, y) قطع می کند.

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

چون هر سه خط با هم متقاطع اند پس نقطه تقاطع بالای خط l_3 نیز قرار دارد.

اگر این قیمت ها در معادله خط مستقیم l_3 وضع شود داریم که:

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

یا:

$$a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

برای آسانی کار ضریب های معادلهٔ فوق را به شکل دیترمینانت می نویسیم.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

که این شرط تقاطع سه خط مستقیم میباشد.

اگر این دیترمنانت توسط سطر سوم انکشاف داده شود $a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ به دست می آید.

مثال: نشان داده می شود که خطوط مستقیم زیر که معادله های شان داده شده اند با هم متقاطع اند یا خیر. اگر متقاطع باشند، کمیات وضعیهٔ نقطه تقاطع آن ها عبارت اند از:

$x + 4y + 3 = 0$.................I

$5x - 4y - 5 = 0$.................II

$2x + 2y + 1 = 0$.................III

دیترمینانت ضرایب معادله های فوق عبارت اند از:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -24 & -20 \\ 0 & -6 & -5 \end{vmatrix} \qquad R_2 - 5R_1 \qquad R_3 - 2R_1$$

$$= 1\begin{vmatrix} -24 & -20 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = 1(120 - 120) = 0$$

در نتیجه خطوط مستقیم فوق با هم متقاطع اند و کمیات وضعیه نقطه تقاطع عبارت اند از:

$$(x_1y_1) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) = \left(\frac{(4)(-5) - (-4)(3)}{(1)(-4) - (5)(4)}, \frac{(3)(5) - (-5)(1)}{(1)(-4) - (5)(4)}\right) = (\frac{1}{3}, -\frac{5}{6})$$

جواب به سؤال های تمرین

1- میل خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $(3,-2)$ و $(2,7)$ می گذرد.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-2)}{2 - 3} = \frac{9}{-1} = -9$$

2- اگر $A(8,6)$، $B(-4,2)$ و $C(-2,-6)$ رأس های یک مثلث باشند میل هر ضلع مثلث را دریابید.

حل:

$$m_{AB} = \frac{2 - 6}{-4 - 8} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3} \qquad m_{BC} = \frac{-6 - 2}{-2 - (-4)} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad m_{AC} = \frac{-6 - 6}{-2 - 8} = \frac{-12}{-10} = \frac{6}{5}$$

3- با استفاده از میل خط مستقیم نشان دهید که نقاط $(a,2b)$، $(c,a+b)$ و $(2c-a,2a)$ بالای یک خط مستقیم واقع اند.

حل: فرضاً $(a,2b)$ A و $(c,a+b)$ B و $(2c-a,2a)$ C باشد وقتی بالای یک خط مستقیم واقع اند که میل AB مساوی به میل BC باشد.

$$m_{AB} = \frac{a + b - 2b}{c - a} = \frac{a - b}{c - a} \qquad m_{BC} = \frac{2a - (a + b)}{2c - a - c} = \frac{a - b}{c - a}$$

و یا از طریق AB=AC+BC نیز می توانیم نشان دهیم که این سه نقطه بالای یک خط مستقیم قرار دارد؛ چون موضوع درس، میل خط مستقیم می باشد از این سبب توسط میل نشان داده شده است.

4- خط مستقیم $\overline{AB}$ از نقاط $A(1,-2)$ و $B(2,4)$ میگذرد و خط مستقیم $\overline{CD}$ که از نقاط $C(4,1)$ و $D(-8,2)$ می گذرد این دو خط باهم:

a) موازی اند. b) عمود اند. c) هیچکدام

حل: $m_{AB} = \frac{4-(-2)}{2-1} = \frac{6}{1}$ $m_{CD} = \frac{2-1}{-8-4} = \frac{1}{-12} = -\frac{1}{12}$

جواب c درست است.

5- خط مستقیم $y = 3$ و خط مستقیم $x = 3$ باهم: a) موازی اند. b) عمود اند. c) هیچکدام

حل: جواب b درست است.

6- خطوط مستقیم $x = -1$ و $x = 3$ باهم : a) موازی اند. b) عمود اند. c) هیچکدام

حل: جواب a درست است.

7- میل خط $y = -\sqrt{3}$ مساوی است به:

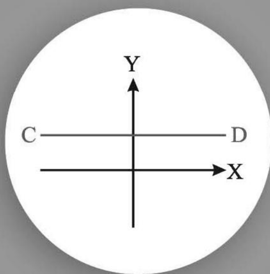
a) 1 b) صفر c) -1 d) تعریف نه شده است.

حل: چون این خط با محور x موزای بوده میل آن صفر است جزء b درست می باشد.

8- میل خط مستقیم $x = 0.03$ مساوی است به:

a) 1 b) صفر c) -1 d) تعریف نه شده است.

حل: چون خط مستقیم با محور x عمود است میل آن تعریف نشده (جزء d درست است).



معادلهٔ یک خط مستقیم

صفحهٔ کتاب (319)   وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن معادله یک خط مستقیم را بیآموزند. • باشرایط داده شده معادله های خطوط مستقیم را دریافت کرده بتوانند • در حل مسایل هندسی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آنرا درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض ایجاد انگیزه سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود که جواب آن: معادله های تمام خطوط مستقیمی که با محور x موازی باشد $y=b$ می باشد که b یک عدد ثابت است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

برای شاگردان توضیح گردد که خط (l) موازی با محور (X) امکان دارد که بالای محور (X) یا پایین محور (X) و یا روی محور (X) قرار داشته باشد که به ترتیب معادله های آن عبارت از: $y=b$, $y=-b$ و $y=0$ می باشد. مثال اول حل شود و در چارت و یا روی تخته در شکل نشان داده شود.

سؤال فعالیت این صفحه را از شاگردان بپرسید، که جواب آن $y=0$ می باشد. معادله خطوط مستقیمی که با محور y موازی می باشد توضیح گردد که خط مستقیم امکان دارد به طرف راست ویا به طرف چپ محور y قرار داشته باشد و یا این که بالای محور y منطبق باشد که معادله های آن به ترتیب $x=a$ ، $x=-a$ و $x=0$ می باشد. و مثال دوم با سهم گیری شاگردان حل شود. فعالیت این صفحه را شاگردان حل کند که جواب آن $x=0$ می باشد. بعد از توضیح طریق یافتن معادلهٔ خط مستقیم که میل و نقطه تقاطع آن با محور yمعلوم باشد. مثال سوم با سهم گیری شاگردان حل شود، بعد از توضیح طریق یافتن معادله خط مستقیم که میل و یک نقطه آن معلوم باشد و یا دونقطه آن معلوم باشد مثال های (4) و(5) را باسهم گیری شاگردان حل کنید. بعد از توضیح طریق به دست آوردن معادله خط مستقیمی که نقاط تقاطع آن با محور های X و Y معلوم باشد مثال های(ششم) و(هفتم) را نیز با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال زیر حل شود

معادله خط مستقیمی را دریابید که از نقطه $p(0,0)$ بگذرد و بر خط مستقیم $3x-2y+2=0$ عمود باشد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤالات ذیل از شاگردان پرسیده شود.

1- معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که از نقطه $p(0,0)$ بگذرد و با خط $x+y+1=0$ موازی باشد.

2- معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که محور (X) را در 5 و محور y را در $\frac{1}{5}$ قطع کند.

$$y=\frac{1}{25}x-\frac{1}{5}$$

معلومات اضافی برای معلم

1- معادله خط مستقیمی که میل آن $\frac{2}{3}$ و محور y را در $b=3$ قطع می کند عبارت است از:

$$y=\frac{2}{3}x+3$$

2-

- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه $(4,5)$ می گذرد و با محور x موازی باشد عبارت از $y=5$ می باشد.
- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه $(-6,7)$ می گذرد و با محور y موازی باشد عبارت از $x=-6$ می باشد.
- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه $(-2,3)$ می گذرد و میل آن 2 باشد عبارت از $2x+y+7=0$ می باشد.
- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه $(1,4)$ می گذرد و میل آن تعریف نه شده باشد عبارت از $x=1$ می باشد.
- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقاط $(3,0)$ و $(0,-2)$ بگذرد عبارت از $2x-3y-6=0$ می باشد.

3- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه $p(-1,4)$ بگذرد و بر خط $x-2y-7=0$ عمود باشد عبارت است از:

$$y=-2x+2$$

4- معادلهٔ خط مستقیمی که محور (X) را در 4 و محور y را در $-\frac{1}{2}$ قطع می کند عبارت است از:

$$(x-8y-4=0)$$

5- معادلهٔ خط مستقیمی که محور (X) را در $(a,0)$ و محور y را در نقطهٔ $(0,b)$ قطع کند؛ عبارت است از:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$bx+ay=ab$$

$$ay=-bx+ab$$

$$y=-\frac{b}{a}x+b\Rightarrow m=-\frac{b}{a}$$

6- معادله های خطوطی ناصف های عمودی که از نقاط داده شدهٔ زیر بگذرد عبارت اند از:

$$(2,1),(1,2)\longrightarrow y=x$$

$$(3,3),(0,-1)\longrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{17}{8}$$

7- معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه $P(0,0)$ بگذرد و با خط مستقیم $x+y+1=0$ موازی باشد عبارت است از:

$y=-x$

معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطه P(2,-3) بگذرد و با خط مستقیم 3x-7y+3=0 موازی باشد عبارت است از:

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{27}{7}$$

معادلهٔ خط مستقیمی که از P(1,2) بگذرد و با خط مستقیم x+9y-11=0 موازی باشد عبارت است از:

$$y = -\frac{1}{9}x + \frac{19}{9}$$

معادلهٔ خط مستقیمی که میل آن -4 و محور x را در -9 قطع کند عبارت از $4x + y - 36 = 0$ می باشد.

معادله خط ناصف عمودی خطی که از نقاط $(2,-3)$ و $(4,5)$ می گذرد عبارت از $x + 4y - 7 = 0$ می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- معادله های خطوطی مستقیم زیر را دریابید:

a: معادلهٔ خط موازی با محور x که از نقطه $(7,-9)$ میگذرد.

b: معادلهٔ خط عمود بر محور X که از نقطه $(-5,3)$ می گذرد.

حل:

a) $y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9 \quad m = 0$

b) $x = -5$

2- معادله های خطوط مستقیم زیر را دریابید:

a: معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که میل آن 7 و از نقطه $(-6,5)$ بگذرد.

b: میل آن صفر و از نقطهٔ $(8,-3)$ بگذرد.

c: از نقطهٔ $(-8,5)$ بگذرد و میل آن تعریف نشده باشد.

d: که از نقاط $(-5,-3)$ و $(9,-1)$ بگذرد.

e: که میل آن -4 و محور Y را در -9 قطع کند.

حل:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

a) $y - 5 = 7(x + 6) \Rightarrow y - 5 = 7x + 42 \Rightarrow 7x + 47 = 7x - y + 47 = 0$

b) $y + 3 = 0(x - 8) \Rightarrow y = -3 \Rightarrow y + 3 = 0$

c) $x = -8 \Rightarrow x + 8 = 0$

d) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = \frac{-1+3}{9+5}(x+5)$

$y + 3 = \frac{2}{14}(x+5) \Rightarrow 14y + 42 = 2(x+5)$

$14y + 42 = 2x + 10 \Rightarrow -2x + 14y + 32 = 0$

$x - 7y - 16 = 0$

e) $y = mx + b$

$y = -4x + 9$

$y + 4x - 9 = 0$

3- معادله های اضلاع مثلث را دریابید که رأس های آن $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ و $C(3,-8)$ باشد.

$$AB: y-2=\frac{4-2}{5+3}(x+3) \Rightarrow y-2=\frac{2}{8}(x+3)$$

$$y-2=\frac{1}{4}(x+3) \qquad 4y-8=x+3 \Rightarrow 4y-x-11=0$$

طریق دوم:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x+3}{8}=\frac{y-2}{2} \Rightarrow \frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x-4y+11=0 \text{ یا } 4y-x-11=0$$

$$BC: y-4=\frac{-8-4}{3-5}(x-5)=6(x-5)=6x-30$$

$$y-4=6x-30$$

$$6x-y-26=0$$

یا:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-4}{-8-4} \Rightarrow \frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{-12} \Rightarrow 6x-y-26=0$$

$$AC: A(-3,2)=(x_1 y_1) \qquad C(3,-8)=(x_2,y_2)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{-8-2} \Rightarrow \frac{x+3}{6}=\frac{y-2}{-10} \Rightarrow 5x+3y+9=0$$

4- معادلهٔ خط مستقیمی را بنویسید که از نقطهٔ $(-4,-6)$ میگذرد و عمود بر خطی باشد که میل آن $\frac{-3}{2}$ می باشد.

حل:

$$y+6=m_1(x+4)$$

$$m_2=\frac{-3}{2}\ ,\ m_1\cdot m_2=-1 \Rightarrow m_1(\frac{-3}{2})=-1 - 3m_1=-2 \Rightarrow m_1=\frac{2}{3}$$

$$y+6=\frac{2}{3}(x+4) \Rightarrow 3y+18=2x+8$$

$$3y-2x+10=0 \Rightarrow 2x-3y-10=0$$

5- معادلهٔ خط مستقیمی را بنویسید که از نقطه $(11,-5)$ بگذرد و موازی با خطی باشد که میل آن -24 می باشد.

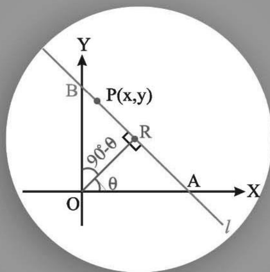
حل:

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+5=m_1(x-11)$$

$m_1=m_2=-24$ شرط موازی بودن است.

$$y+5=-24(x-11)$$

$$y+24x-259=0$$



معادلهٔ نورمال یک خط مستقیم

صفحهٔ کتاب (325)   وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن معادلهٔ خط مستقیم به شکل نورمال را بیآموزند. • معادله عمومی یک خط مستقیم را بشناسند. • طریق تبدیل معادله عمومی یک خط مستقیم به اشکال معادله های دیگر خط مستقم را بیآموزند. • معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم را به اشکال دیگر معادله های خط مستقیم تبدیل کرده بتوانند. • در حل مسایل هندسی از این معادله ها استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، مباحثه، کارهای گروپی و انفرادی
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی در صورت که چارت شکل ورودی در مقابل صنف موجود باشد و یا شکل به روی تخته رسم شده باشد سؤال قسمت ورودی از شاگران پرسیده شود در مورد معلم محترم همکاری نمایند. خط نارمل یک خط مستقیم عبارت از خط مستقیمی است که از مبدأ کمیات وضعیه بالای خط مستقیم داده شده عمود باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

طریق به دست آوردن معادله نورمال یک خط مستقیم را به شاگردان توضیح نموده و مثال (1) را با سهم گیری شاگردان حل کنید. سپس شاگردان فعالیت (1) این درس را در گروپ ها انجام دهند، که جواب آن عبارت است از:

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ = 10$$

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 10 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 10 \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 20$$

معادلهٔ عمومی و حالات خصوصی معادلهٔ عمومی خط مستقیم را برای شاگردان واضح سازید.

تبدیل معادله عمومی یک خط مستقیم به شکل معادله معیاری را به شاگردان توضیح دهید و مثال 2 را با سهم گیری فعال شاگردان حل کنید.

به همین ترتیب وقتی که،طریق تبدیل معادله عمومی یک خط مستقیم به شکل معادله خط مستقیمی که میل و یک نقطه آن معلوم باشد واضح شود. مثال (3) را با سهم گیری شاگران حل کنید.

غرض توضیح تبدیل معادلهٔ عمومی خط مستقیم به شکل معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطه آن معلوم باشد مثال(4) را حل کنید.

غرض توضیح تبدیل معادلهٔ عمومی به معادلهٔ خط مستقیمی را که نقاط تقاطع آن با محور های X و Y معلوم باشد. مثال 5 را با سهم گیری شاگردان حل کنید، فعالیت صفحه (330) را شاگردان حل کنند که جواب آن قرار زیر می باشد:

$$3x - 2y = 6$$

برای تقاطع با محور y، $x=0$ وضع می نماییم درنتیجه $y = -3$ می شود. پس این خط مستقیم محور y را در نقطه (0,−3) قطع می کند. برای تقاطع با محور x، $y=0$ قرار می دهیم داریم که $x=2$ می باشد. پس خط مستقیم محور x را در نقطه (2,0) قطع می کند.

طریق تبدیل کردن معادله عمومی یک خط مستقیم به شکل نورمال آن را واضح سازید و مثال (6) را حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

فعالیت صفحه (331) حل گردد که جواب آن قرار زیر می باشد:

$$k = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \pm\sqrt{13}$$

چون $c > 0$ است؛ پس $k = -\sqrt{13}$ می شود. هر دو طرف معادله را بر $-\sqrt{13}$ می نماییم:

$$\frac{2x - 3y + 6}{-\sqrt{13}} = \frac{0}{-\sqrt{13}}$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

یا

$$\frac{-2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

که $\sin\theta = \frac{13}{\sqrt{13}}$ و $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ و طول نارمل آن $\frac{6}{\sqrt{13}}$ می باشد.

در نتیجه θ در ربع دوم قرار دارد و از روی جدول مثلثاتی $\theta = 123^\circ\ 40'$ می باشد. پس معادله نارمل خط مستقیم عبارت است از:

$$x\cos 123^\circ\ 40' + y\sin 123^\circ\ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤال ذیل از شاگردان پرسیده شود.

معادلهٔ خط نورمال خط مستقیم را دریابید که طول نورمال آن 7 واحد و زاویه میل نورمال آن 150° باشد.

جواب: $(\sqrt{3}x - y + 14 = 0)$

معلومات اضافی برای معلم

اشکال معادلات یک خط مستقیم.

اگر B, A و C اعداد ثابت و A و B در عین وقت صفر نباشد.

1 $\mathrm{Ax + By = C}$ (standard from)

2 $y = mx + b$ (slop – intercept form)

3 $y - y_1 = m(x - x_1)$ (point – slope form)

4 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (Tow points form)

5 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (Tow – intercepts form)

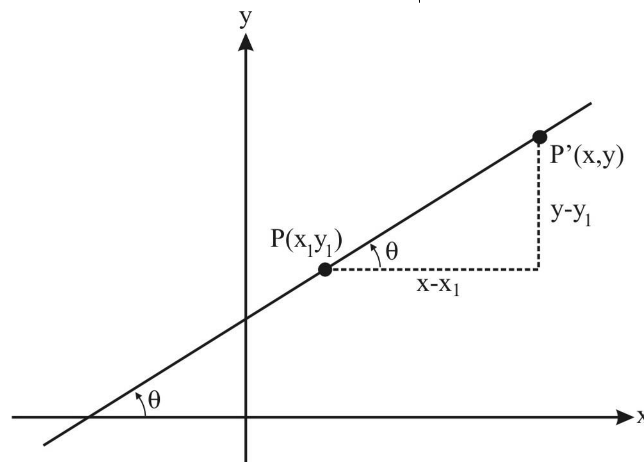
6 $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ (Normal form) (PerpendicularForm)

7 $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ (symmetric form)

ثبوت شماره 7: اگر l یک خط مستقیمی که عمود نباشد، زاویه میل آن θ و میل آن m باشد و نقطهٔ $p(x_1, y_1)$ روی خط l واقع باشد:

$$\tan\theta = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

این شکل معادله را شکل متناظر معادلهٔ خط مستقیم می گویند.



$pp' = r$ می باشد. داریم که:

$$\cos\theta = \frac{x - x_1}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y - y_1}{r}$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

$$x = x_1 + r\cos\theta$$

$$y = y_1 + r\sin\theta$$

زیرا که:

$$m = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(y - y_1)^2}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{r^2}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x - x_1}$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = r \Rightarrow x = x_1 + r\cos\theta$$

- مثال: تبدیل معادله $2x-3y+4=0$ به اشکال دیگر معادله های خط مستقیم:

a- که میل و تقاطع آن با محور y معلوم باشد.

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

که میل آن $\frac{2}{3}$ و محور y را در $\frac{4}{3}$ قطع می کند.

b- که میل و یک نقطه آن معلوم باشد:

یک نقطه خط عبارت از $(-\frac{c}{a},0) = (-2,0)$ می باشد:

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \qquad y - 0 = \frac{2}{3}(x + 2) \qquad y = \frac{2}{3}(x + 2)$$

c- که دو نقطه آن معلوم باشد:

دو نقطهٔ خط مستقیم عبارت است از:

$$(-\frac{c}{a},0) = (-2,0)$$

$$(0,-\frac{c}{b}) = (0,\frac{4}{3})$$

$$y - 0 = \frac{\frac{4}{3} - 0}{0 - (-2)}(x + 2)$$

d- تقاطع آن با محور ها معلوم باشد:

$$2x - 3y = -4 \Rightarrow \frac{2x}{-4} - \frac{3y}{-4} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$$

e: معادله 2x-3y+4=0 به شکل نارمل عبارت است از:

$2x-3y=-4$

هر دو طرف را بالای $\pm\sqrt{(2)^2+(-3)^2}=\pm\sqrt{13}$ تقسیم نمایید چون C>0 است؛ پس بالای $-\sqrt{13}$ تقسیم کنید.

$$\frac{-2x}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$ و $p=\frac{4}{\sqrt{13}}$ می باشد.

f- معادلهٔ خط مستقیم $2x-3y+4=0$ به شکل معادلهٔ متناظر خط مستقیم عبارت است از:

$$\tan\theta=m=\frac{2}{3} \qquad \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$$

که یک نقطهٔ خط مستقیم $(-2,0)$ می باشد؛ پس معادله آن $r=\frac{y+0}{\frac{3}{\sqrt{13}}}=\frac{x+2}{\frac{-2}{\sqrt{13}}}$ می باشد.

- اگر طول خط نارمل 3 واحد و زاویه میل خط نارمل 120 درجه باشد معادله این خط مستقیم عبارت است از:

$$x\cos120^\circ+y\sin120^\circ=3$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=3\Rightarrow x-\sqrt{3}y+6=0$$

- معادله های زیر به شکل نارمل عبارت اند از:

a) $5x-12y+39=0$ b) $8x+6y-1=0$

c) $4x+7y-2=0$ d) $4x-3y+14=0$

حل:

a) $5x-12y=-39$

$-5x+12y=39$

هر دو طرف معادله را به $\sqrt{(-5)^2+(12)^2}$ و یا بر $\sqrt{169}=13$ تقسم می کنیم:

$$\frac{-5x}{13}+\frac{12}{13}y=3$$

b) $8x+6y=1$

هر دو طرف معادله را به $\sqrt{(8)^2+(6)^2}$ و یا بر $\sqrt{100}=10$ تقسم می کنیم:

$$\frac{8x}{10}+\frac{6y}{10}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{4x}{5}+\frac{3y}{5}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{x}{(\frac{5}{4})}+\frac{y}{(\frac{5}{3})}=\frac{1}{10}$$

c) $4x+7y=2$

هر دو طرف معادله را به $\sqrt{(4)^2+(7)^2}=\sqrt{65}$ تقسم می کنیم:

$$\frac{4x}{\sqrt{65}}+\frac{7y}{\sqrt{65}}=\frac{2}{\sqrt{65}}\Rightarrow\frac{x}{\frac{\sqrt{65}}{4}}+\frac{y}{\frac{\sqrt{65}}{7}}=\frac{2}{\sqrt{65}}$$

d) $4x-3y=-14$

$-4x+3y=14$

هر دو طرف معادله را به $5 = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$ تقیسم می کنیم:

$$-\frac{4x}{5} + \frac{3}{5}y = \frac{14}{5}$$

- معادله عمومی خط مستقیم ax+by+c=0 به شکل معادله متناظر خط مستقیم عبارت است از:

$$\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

یک نقطه بالای خط مستقیم ax+by+c=0 عبارت است از: $(-\frac{c}{a}, 0)$

پس معادله خط مستقیم به شکل متناظر عبارت است از:

$$\frac{x-(-\frac{c}{a})}{\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{y-0}{\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}} = r$$

- معادله نورمال خط مستقیم که طول نارمل آن 7 واحد و زاویه میل نارمل آن 150 درجه باشد؛ عبارت است از: $x(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) = 7 \Rightarrow \sqrt{3}x - y + 14 = 0$
- معادله نارمل یک خط مسقتیم که طول نارمل آن 5 واحد و زاویه میل نارمل 135 درجه باشد عبارت است از:

$$x\cos 135^\circ + y\sin 135^\circ = 5$$

$$x(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 5 \Rightarrow x - y = 5\sqrt{2}$$

جواب به سؤال های تمرین

1- معادلهٔ نورمال خط مستقیم $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$ را به شکل معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم تبدیل نمایید.

حل:

$$x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$$

$$x \cdot \frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 0$$

$$x + \sqrt{3}y - 14 = 0$$

2- معادلهٔ نورمال خط مستقیم $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ - 6 = 0$ را به شکل معادله عمومی یک خط مستقیم تبدیل نمایید.

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 6 = 0$$

$$-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 12 = 0$$

3- معادله های عمومی یک خط مستقیم که در زیر داد شده اند به شکل معادلهٔ نورمال تبدیل نمایید.

$a: \quad 15y - 8x + 3 = 0 \qquad b: \quad 2x + 5y - 2 = 0 \qquad c: \quad 2x + 4y + 7 = 0$

حل جزء a:
$$k = \pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{(-8)^2 + (15)^2} = \pm\sqrt{64 + 225} = \pm\sqrt{289} = 17$$

چون $C > 0$ است؛ پس $k = -17$ در نظر گرفته می شود و هر دو طرف مساوات را به 17- تقسیم می نماییم.

$$\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{3}{17} = 0$$

چون $\cos\theta = \frac{8}{17} > 0$, $\sin\theta = \frac{-15}{17} < 0$ می باشد؛ پس θ در ربع چهارم قرار دارد.

جزء b:

$$k = \pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{(2^2) + (5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

چون $C < 0$ است؛ پس $k = \sqrt{29}$ می شود داریم که:

$$\frac{2x}{\sqrt{29}} + \frac{5y}{\sqrt{29}} - \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

پس θ در ربع اول قرار دارد و نظر به جدول مثلثاتی $\theta = 68^\circ\ 10'$ می باشد.

$$x\cos 68^\circ 10' + y\sin 68^\circ 10' - \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

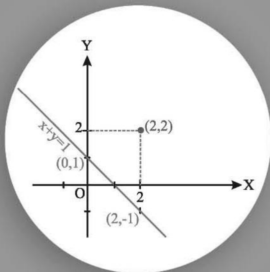
جزء c:
$$k = \pm\sqrt{2^2 + 4^2} = \pm\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = -2\sqrt{5}$$

چون $C > 0$ است؛ پس:

$$-\frac{2x}{2\sqrt{5}} - \frac{4y}{2\sqrt{5}} - \frac{7}{2\sqrt{5}} = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{7}{2\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow -2x - 4y - 7 = 0$$

چون $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هر دو منفی اند؛ پس θ در ربع سوم قرار دارد.



فاصلۀ یک نقطه از یک خط مستقیم
(Distance of a point from a line)
صفحۀ کتاب (333)　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق به دست آوردن فورمول فاصلۀ یک نقطه از یک خط مستقیم را بیآموزند. • فاصلۀ یک نقطه را از یک خط مستقیم که معادله خط مستقیم به شکل نورمال و یا به شکل عمومی داده شده باشد دریافت کرده بتوانند. • فاصله بین دو خط موازی را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل هندسی از این فورمول استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی و انفرادی
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی ، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی ، غرض خلق انگیزه برای آموزش، سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود که جواب آن $\frac{3}{\sqrt{2}}$ می باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

از روی شکل در صورتی که معادلۀ خط مستقیم به شکل نورمال و یا به شکل عمومی داده شده باشد، فورمول فاصله را به دست آورید؛ سپس مثال (1) را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

فعالیت صفحه (334) را شاگردان حل کنند که حل آن قرار زیر می باشد:

$$d=\frac{|3(5)-2(8)+7|}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2}}=\frac{|15-16+7|}{\sqrt{9+4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

بعد طریق یافتن فاصله بین دوخط موازی را در حل مثال (2) با سهم گیری شاگردان توضیح کنید.

شاگردان فعالیت صفحه(335) را کارکنند که حل آن قرار زیر می باشد:

فاصله نقطه $(0,7)$ از خط مستقیم $3x+2y=10$ عبارت است از:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(0)+2(7)-10|}{\sqrt{9+4}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

استاد محترم آنها را رهنمایی و نظارت کند و مثال سوم را حل نماید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال ذیل را با سهم گیری شاگران حل نمایید .

فاصلۀ نقطۀ $(-54,71)$را از خط مستقیم $4x+3y=17$ دریابید.　　　جواب(واحد $d=4$)

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال ذیل را از شاگردان بپرسید.

فاصلهٔ نقطه $(-60,25)$ را از خط مستقیم $3x+7y+5=0$ دریابید   جواب($d=0$)

معلومات اضافی برای معلم

از فورمول $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ داریم که:

نتیجه(1): اگر خط افقی باشد درآن صورت:

$$d=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

ثبوت: اگر خط l افقی باشد معادله آن $y=-\frac{c}{b}$ می باشد.

فاصله نقطه $p(x_1,y_1)$ از خط l عبارت از $d=|y_1-y|$ می باشد.

$$d=\left|y_1-\frac{-c}{b}\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

2- اگر خط l عمودی باشد شکل معادله آن $x=-\frac{c}{a}$ می شود.

پس فاصله نقطه $p(x_1,y_1)$ از خط l عبارت است از: $d=|x_1-x|$

$$d=\left|x_1-\frac{-c}{a}\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

یادداشت: اگر نقطه $p(x_1,y_1)$ بالای خط مستقیم l واقع باشد فاصلهٔ نقطه p از خط مستقیم $ax_1+by_1+c=0$
$d=0$ می شود.

فاصلهٔ نقطه $p(3,-4)$ از خط مستقیم $4x-3y+6=0$ مساوی است به:

$$d=\frac{|4(3)-3(-4)+6|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\frac{|12+12+6|}{\sqrt{16+9}}=\frac{30}{\sqrt{25}}=\frac{30}{5}=6$$

- نخست باید نشان داده شود که خطوط مستقیم 6x+8y+16=0 و 3x+4y-12=0 با هم موازی می باشند.

در قدم دوم فاصله بین آن ها عبارت است از:

$$m_2=\frac{-3}{4} \text{ و } m_1=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}$$

در نتیجه این خطوط مستقیم با هم موازی می باشند و فاصله بین آن ها عبارت است از:

چون نقطه $(0,3)$ بالای خط مستقیم دومی قرار دارد؛ پس:

$$d=\frac{|6(0)+8(3)+16|}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}}=\frac{|24+16|}{\sqrt{100}}=\frac{40}{10}=4$$

- فاصله نقطه $p(0,3)$ از خط مستقیم $5x-12y-29=0$ عبارت است از: $d=\frac{65}{13}$
- فاصله نقطه $p(1,-2)$ از خط مستقیم $x-2y-5=0$ عبارت است از: d=0

1- موقعیت یک نقطه نظر به یک خط مستقیم:

اگر نقطه $p(x_1, y_1)$ در مستوی xy روی خط مستقیم l، $(ax + by + c = 0)$ واقع نباشد.

a) اگر $(ax_1 + by_1 + c > 0)$ باشد نقطهٔ P به طرف بالای خط l واقع است.

b) اگر $(ax_1 + by_1 + c < 0)$ باشد نقطهٔ P به طرف پایین خط l واقع است.

طور مثال: نقطهٔ $p(-2,4)$ به طرف بالای خط $4x + 5y = 3$ قرار دارد؛ زیرا که $4(-2) + 5(4) - 3 = 9 > 0$ می باشد. پس نقطهٔ $p(-2,4)$ به طرف بالای خط مستقیم قرار دارد.

2- مبدا کمیات وضعیه و نقطهٔ $p(x_1, y_1)$

a) اگر $(ax_1 + by_1 + c)$ و c هم علامت باشد، نقطه $p(x_1, y_1)$ و مبدأ کمیات وضعیه به یک طرف خط مستقیم قرار دارد.

b) اگر $(ax_1 + by_1 + c)$ و c مختلف العلامت باشد نقطه $p(x_1, y_1)$ و مبدأ کمیات وضعیه به دو طرف خط l قرار دارد.

طور مثال: نقطهٔ $p(5,-8)$ و مبدا کمیات وضعیه به دو طرف خط مستقیم $3x + 7y + 15 = 0$ قرار دارد؛ زیرا که $c = 15$ و $3(5) + 7(-8) + 15 = -26 < 0$ می باشد؛ پس نقطه و مبدا کمیات وضعیه به دو طرف خط $3x + 7y + 15 = 0$ واقع می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- فاصلهٔ بین هر جوره خطوط موازی را که معادلات آن قرار زیر میباشد دریابید:

$3x - 4y + 7 = 0$ و $3x - 4y + 3 = 0$

$12x + 5y + 13 = 0$ و $12x + 5y - 6 = 0$

$2x + 4y = 1$ و $x + 2y - 5 = 0$

1- حل a: یک نقطه کیفی یکی از خطوط مستقیم داده شده را دریافت نموده بعدا فاصله این نقطه را از خط دومی دریافت می نماییم طور مثال:

$$3x - 4y + 7 = 0\ ,\ x = -1 \Rightarrow y = 1$$

فاصله نقطه $(-1,1)$ را از خط مستقیم $3x - 4y + 3 = 0$ دریافت می کنیم:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad d = \frac{|3(-1) - 4(1) + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 4 + 3|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

حل b:

$$x = 1 \qquad y = -5$$

فاصله نقطه $(1,-5)$ را از خط مستقیم $12x + 5y - 6 = 0$ دریافت می نماییم:

$$d = \frac{|12(1) + 5(-5) - 6|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{12 - 25 - 6}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|-19|}{13} = \frac{19}{13}$$

حل c: در مستقیم $x + 2y - 5 = 0$ اگر $y = 0$ شود $x = 5$ می شود.

$$d=\frac{|5(2)+0(4)-1|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{10-1}{\sqrt{4+16}}=\frac{9}{\sqrt{20}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$$

2- فاصلهٔ نقطهٔ $P(6,-1)$ را از خط مستقیم $6x-4y+9=0$ دریابید.

$$d=\frac{|6(6)-4(-1)+9|}{\pm\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{36+4+9}{\sqrt{36+16}}=\frac{49}{\sqrt{52}}$$

3- فاصله بین دو خط موازی $3x+6y-8=0$ و $2x+4y+5=0$ مساوی است به:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هرسه درست اند

حل:

در خط مستقیم اول: $x=0 \Rightarrow 6y=8 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$

فاصله نقطه $(0,\frac{4}{3})$ را از خط مستقیم $2x+4y+5=0$ به دست می آوریم:

$$d=\frac{\left|2(0)+4(\frac{4}{3})+5\right|}{\sqrt{4+16}}=\frac{\frac{16}{3}+5}{\sqrt{20}}=\frac{31}{3\sqrt{20}}=\frac{31}{6\sqrt{5}}$$

(جزءb درست است).

4- فاصله نقطه (1.2) از خط مستقیم $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ عبارت است از:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

حل:

$$d=\frac{\left|\frac{3}{5}(1)-\frac{4}{5}(2)+2\right|}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}}=\frac{\left|\frac{3}{5}-\frac{8}{5}+2\right|}{1}=\frac{3-8+10}{5}=\frac{13-8}{5}=\frac{5}{5}=1$$

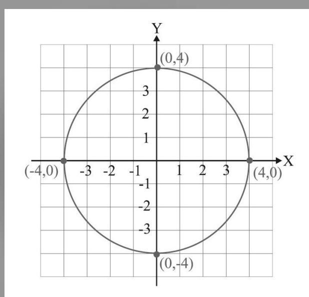
(جزء b درست است).

5- فاصله بین نقطه $(-2,7)$ و خط مستقیم $24x+7y-2=0$ مساوی است به:

$a:\ 0.04$ $b:\ \frac{1}{25}$ $c:\ 4\cdot10^{-2}$ $d:$ هرسه درست اند

حل: $$d=\frac{|24(-2)+7(7)-2|}{\sqrt{(24)^2+(7)^2}}=\frac{|-48+49-2|}{\sqrt{576+49}}=\left|-\frac{1}{\sqrt{625}}\right|=\frac{1}{25}$$

(جزء d درست است).



دایره (*Circle*)

صفحهٔ کتاب (337) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان در اخیر درس باید:
• طریق یافتن معادلهٔ عمومی و معیاری دایره ر ابیآموزند.
• حالات خاص معادلهٔ دایره را بشناسند.
• معادله های معیاری و عمومی دایره را باهمدیگر تبدیل کرده بتوانند.
• از روی طول شعاع و کمیات وضعیهٔ مرکز دایره معادله دایره را دریافت و همچنان دایره را رسم کرده بتوانند.
• از روی معادلهٔ دایره، دایره حقیقی، نقطوی و مجازی را تشخیص کرده بتوانند.
• از روی معادلهٔ دایره کمیات وضعیهٔ مرکز و طول شعاع دایره را دریافت کرده بتوانند.
• در حل مسایل هندسی از فورمول های دایره استفاده کرده بتوانند، و اهمیت آن را درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی، مباحثه و...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی ، تخته، چارت ها، اشکال و...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی از روی چارت شکل قسمت ورودی سؤال ورودی غرض خلق انگیزه از شاگردان پرسیده شود.
جواب آن این است که معادله این دایره عبارت است از: $x^2 + y^2 = 16$</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
بعد از تعریف دایره، معادله معیاری دایره در صورتی که چارت شکل موجود باشد و یا از شکل روی تخته به دست آورده شود.
مثال (1) صفحه(338) را باسهم گیری شاگردان حل کنید. بعد فعالیت این صفحه را شاگردان حل کنند که جواب آن $x^2 + y^2 = 9$ می باشد.
طریق به دست آوردن معادلهٔ عمومی دایره توضیح گردد ونیز دایرهٔ حقیقی، مجازی، نقطوی و حالات خاص معادله دایره به شاگردان فهمانده شود مثال 2 را با سهم گیری شاگردان حل کنید.
فعالیت صفحه 339 را شاگردان حل کنند. که جواب آن قرار زیر می باشد:
چون شکل عمومی معادله دایره $x^2 + (y-5)^2 = 10$ عبارت از: $(x-0)^2 + (y-k)^2 = r^2$ می باشد و یا h=0 است</td></tr>
</table>

پس مرکز این دایره روی محور x واقع می باشد. و در معادلهٔ $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ چون $k=r$ می باشد؛ پس دایره با محور y مماس است و در معادلهٔ سومی چون $h^2+k^2=r^2$ است، $(-3)^2+(0)^2=9$ می شود؛ پس دایره از مبدا کمیات وضعیه می گذرد.

مثال 3 را با سهم گیری شاگردان حل کنید. برای اینکه شاگردان بتوانند از روی معادله دایره، طول شعاع و کمیت وضعیه مرکز دایره را دریافت کرده بتوانند. مثال 4 را حل کنید.

مثال های 5 و 6 را نیز با سهم گیری شاگردان حل کنید.

فعالیت صفحه(341) را شاگردان حل کنند که جواب آن قرار زیر می باشد:

$A(0,0) \qquad B(2,0)$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$|AC|=|BC|$

$(h-0)^2+(k-0)^2=(h-2)^2+(k-0)^2$

$h^2+k^2=h^2-4h+k^2 \Rightarrow 4h=4 \Rightarrow h=1$

مرکز دایره $(1,k)$ می باشد چون $0\cdot x+y-1=0$ معادله مماس می باشد، فاصله مماس و مرکز دایره $(1,k)$ عبارت از طول شعاع می باشد.

$\frac{|0(1)+k-1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=r \Rightarrow r^2=|k-1|^2$

$|AC|^2=(k-1)^2$

$h^2+k^2=k^2-2k+1 \Rightarrow 1=2k+1 \Rightarrow k=0$

$r^2=|0-1|^2 \Rightarrow r^2=1$

$(x-1)^2+(y-0)^2=1$

$x^2+y^2-2x=0$

مثال(7) را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال ذیل حل شود.

معادله دایره یی را دریابید که مختصات مرکزآن $(-3,5)$ و با خط مستقیم $4x-3y-18=0$ مماس باشد.

جواب $x^2+y^2+6x-10y-47=0$

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

کمیات وضعیهٔ مرکز وطول شعاع دایره را دریابید که معادله آن $(x+2)^2+y^2=64$

جواب: $r=8$ و $c(-2,0)$ می باشد.

معلومات اضافی برای معلم

1- معادلهٔ دایریی که از سه نقطه می گذرد: اول قیمت ثابت های g,f و c را به دست می آوریم و در معادلهٔ عمومی دایره وضع می کنیم.

مثال: معادله دایرهٔ که از نقاط $A(5,10), B(6,9)$ و $C(-2,3)$ می گذرد عبارت است از:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$\Rightarrow 10g+20f+c+125=0 \ldots\ldots\ldots\ldots II$$
$$36+81+12g+18f+c=0 \Rightarrow 12g+18f+c+117=0 \ldots\ldots\ldots\ldots III$$
$$4+9-4g+6f+c+13=0 \Rightarrow -4g+6f+c+13=0 \ldots\ldots\ldots\ldots IV$$

حال معادله های III,II و IV را حل می کنیم معادلۀ III را از معادلۀ II تفریق کنید:

$$-2g+2f+8=0$$
$$g-f-4=0 \ldots\ldots\ldots\ldots V$$

اگر معادلۀ IV از معادلۀ II تفریق شود داریم که:

$$g+f+8=0 \ldots\ldots\ldots\ldots VI$$

از معادلۀ V و VI داریم که $g=-2$ و $f=-6$ می شود.

اگر قیمت های f و g در معادلۀ II وضع شود در نتیجه c=15 می شود.

پس معادلۀ مطلوب عبارت است از: $x^2+y^2-4x-12y+15=0$

2- معادلۀ دایره یی را که از سه نقطۀ (0,1),(1,0) و (2,1) میگذردعبارت است از:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$
$$0+1+2g(0)+2f+c=0 \Rightarrow 2f+c+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$
$$1+0+2g(1)+2f(0)+c \Rightarrow 2g+c+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$
$$4+1+2g(2)+2f(1)+c=0 \Rightarrow 4g+2f+c+5=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

از مساوات (i) مساوات (ii) را تفریق می نماییم:

$$2f+c+1=0$$
$$\underline{-2g \pm c \pm 1=0}$$
$$2f-2g=0 \Rightarrow g=f \ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

از رابطه (iv) رابطه (iii) تفریق می کنیم داریم که:

$$2f-2g=0$$
$$\underline{-2f \pm 4g \pm c \pm 5=0}$$
$$-6g-c-5=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$
$$2g+c+1=0$$
$$\underline{-6g-c-5=0}$$
$$-4g-4=0 \Rightarrow g=-1$$

قیمت g را در معادله (ii) وضع می نماییم: $2(-1)+c+1=0 \Rightarrow c=1$

قیمت c را در معادله (i) وضع می نماییم: $2f+1+1=0 \Rightarrow f=-1$

کمیات وضعیه مرکز دایره $(-g,-f)=(1,1)$

$$r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{1+1-1}=1$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1-1=0$$
$$x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

3- معادله دایره یی که از نقاط $(3,5)$ و $(-3,7)$ بگذرد، و:

a: مرکز آن بالای محور x واقع باشد. b: مرکز آن بالای محور y واقع باشد.

اگر (a,b) مرکز دایره یی باشد که از نقاط $(3,5)$ و $(-3,7)$ بگذرد.

$$\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(b-7)^2}$$

$$a^2-6a+9+b^2-10b+25=a^2+6a+9+b^2-14b+49$$

$$-12a+4b-24=0$$

$$-3a+b-6=0$$

a: دایره یی که مرکز آن بالای محور x واقع است b=0 می باشد.

$$-3a-6=0\Rightarrow a=-2$$

پس مرکز آن $(-2,0)$ بوده وفاصله نقاط $(3,5)$ و $(-3,7)$ از نقطه مرکز $(-2,0)$ عبارت از شعاع این دایره می باشد.

$$r=\sqrt{(3+2)^2+5^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$

$$(x+2)^2+(y-0)^2=(5\sqrt{2})^2\Rightarrow x^2+y^2+4x-46=0$$

b: دایره یی که مرکز آن بالای محور y واقع باشد. a=0 است.

$$b-6=0\Rightarrow b=6$$

$$r=\sqrt{(3-0)^2+(5-6)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$(x-0)^2+(y-6)^2-\sqrt{10}=0$$

و معادلهٔ دایره عبارت است از: $x^2+y^2-12y+26=0$

4- کمیات وضعیه مرکز و طول شعاع دایره های که معادله های آن قرار ذیل است عبارت اند از:

کمیات وضعیه مرکز	طول شعاع	معادله دایره
$C(-2,0)$	$r=8$	$(x+2)^2+y^2=64$
$C(4,-3)$	$r=6$	$(x-4)^2+(y+3)^2=36$
$C(-5,2)$	$r=0$	$(x+5)^2+(y-2)^2=0$
$C(0,5)$	$r=\sqrt{5}$	$x^2+(y-5)^2=5$
$C(1,-2)$	$r=5$	$x^2+y^2+4x-2y+5=0$
$C(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$	$r=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$	$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

5- نقطه $(1,-2)$ در داخل دایره، خارج دایره یا روی محیط دایره واقع می باشند.

خارج دایره	$1^2+(-2)^2=5>1$	$x^2+y^2=1$
روی محیط دایره	$1^2+(-2)^2=5=5$	$x^2+y^2=5$
داخل دایره	$1^2+(-2)^2=5<9$	$x^2+y^2=9$
داخل دایره	$-21<0$	$x^2+y^2-10x+8y=0$

6- خاصیت های مهم معادلهٔ یک دایره
(Important Properties of the equation of a circle)

معادله معیاری یک دایره به شعاع r و به مرکز $C(h,k)$ عبارت از $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ می باشد. و معادله عمومی یک دایره عبارت از $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

a: شعاع (radius) دایره مساوی است به: $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$ که مرکز دایره $c(-g,-f)$ می باشد.

b: ضریب x^2 با ضریب y^2 مساوی می باشد.

c: هیچ حد xy در آن موجود نباشد.

d: معادله دایره از جنس x و y یک معادله درجه دوم می باشد.

7- تبدیل کردن معادلهٔ عمومی دایره به شکل معیاری:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0..........................I$$
$$(x^2+2gx)+(y^2+2fy)=-c.......................II$$
$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$$
$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

مرکز دایره $c(-g,-f)$ و شعاع دایره $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$ می باشد.

یا به طور مستقیم می توانیم $-\frac{1}{2}$ ضریب x و $-\frac{1}{2}$ ضریب y عبارت از مرکز دایره می باشد یا $(-g-f)$ و

$R=\sqrt{(-g)^2+(-f)^2-Cons\tan term}$ (حد ثابت)

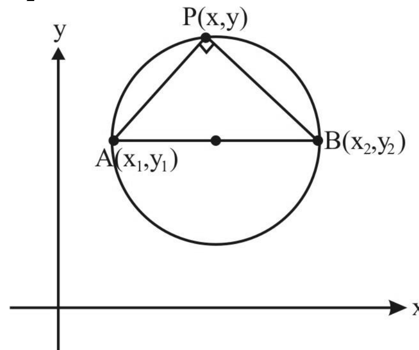
8- معادله دایره یی که کمیات وضعیه انجام های قطر آن (x_1,y_1) و (x_2,y_2) باشد عبارت است از:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ انجام های قطر دایره باشند یا AB قطر دایره باشد و اگر $P(x,y)$ یک نقطه کیفی بالای محیط دایره باشد میدانیم که $B\hat{P}A=90^\circ$ است.

میل خط PA عبارت از $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ و میل خط PB عبارت از $\frac{y-y_2}{x-x_2}$ می باشد. که حاصل ضرب میل های شان (-1) می شود.

$$(\frac{y-y_1}{x-x_1})(\frac{y-y_2}{x-x_2})=-1$$
$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$



مثال: معادلهٔ دایره یی که انجام های قطر آن $(-1,2)$ و $(3,-4)$ باشد؛ عبارت است از:

$$(x+1)(x-3)+(y-2)(y+4)=0$$
$$x^2+y^2-2x+2y-11=0$$

که مرکز دایره $(1,-1)$ و طول شاع آن $r=\sqrt{1^2+(-1)^2-(-11)}=\sqrt{13}$

معادلهٔ دایرهٔ که مرکز آن $(-2,-2)$ و طول شعاع آن $r=2$ باشد؛ عبارت است از:

$$x^2+y^2+4x+4y+4=0$$

9- معادلهٔ دایره را که مرکز آن نقطه $(-3,5)$ و با خط مستقیم $4x-3y-18=0$ مماس باشد؛ عبارت است از:

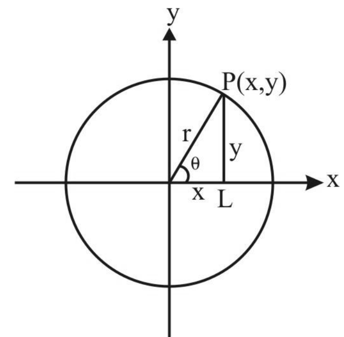
چون شعاع در نقطه تماس بالای مماس عمود می باشد؛ پس فاصله عمودی نقطه $(-3,5)$ از خط مستقیم $4x-3y-18=0$ شعاع دایره می باشد.

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(-3)-3(5)-18|}{\sqrt{16+9}}=|-9|=9$$
$$(x+3)^2+(y-5)^2=9^2$$

یا:

$$x^2+y^2+6x-10y-47=0$$

10- **معادله پارامتریک دایره:** $x^2+y^2=r^2$:



$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

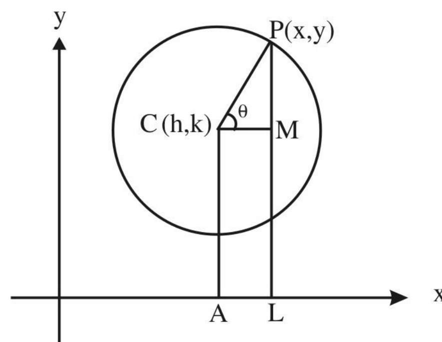
اگر $P(x,y)$ یک نقطه اختیاری محیط دایره باشد $\overline{OP}$ با محور x زاویه θ را می سازد.

$x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

نقطه $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ هر وقت بالای محیط دایره واقع می باشد هر دو طرف را مربع و باهم جمع می کنیم، داریم که:

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

که $y=r\sin\theta$ و $x=r\cos\theta$ را معادلهٔ پارامتریک دایره می گویند.



اگر معادله دایره به شکل $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ باشد:

$$\cos\theta=\frac{x-h}{r} \qquad , \qquad \sin\theta=\frac{y-k}{r}$$
$$\Rightarrow x=r\cos\theta+h\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{I}$$
$$y=r\sin\theta+k\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{II}$$

که $(r\cos\theta+h, r\sin\theta+k)$ عبارت از مختصات پارامتریک یکی از نقاط محیط دایره و معادلات I و II معادلات پارامتریک دایره می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1- معادلهٔ دایره یی را دریابید که:

a: مختصات مرکز آن $(5,-2)$ و $r=4$ باشد.

حل: (معادله معیاری) $(x-5)^2+(y+2)^2=16$ یا $x^2+y^2-10x+4y+13=0$

b: مختصات مرکز آن $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ و شعاع آن $r=2\sqrt{2}$ باشد.

حل: $(x-\sqrt{2})^2+(y+3\sqrt{3})^2=8$ یا $x^2+y^2-2\sqrt{2}+6\sqrt{3}y+21=0$

c: مختصات مرکز آن $(0,0)$ و از نقطهٔ $(1,2)$ میگذرد.

$$r^2=1+2^2 \qquad (x-0)^2+(y-0)^2=5$$
$$r^2=1+4=5 \qquad x^2+y^2=5$$

d: مختصات مرکزآن $(0,0)$ و از نقطهٔ $(-3,-4)$ بگذرد.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad C(0,0)=(h,k)$$
$$\begin{cases} r^2=(-3)^2+(-4)^2 \\ r^2=9+16=25 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=25$$

e: مختصات مرکز آن $(8,-6)$ و از مبدأی کمیات وضعیه بگذرد.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-8)^2+(y+6)^2=100 \qquad \begin{cases} 8^2+(-6)^2=r^2 \\ 64+36=r^2 \\ 100=r^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-16x+12y=0$$

2- نخست نشان دهید که معادله های داده شدهٔ زیر معادله های دایره می باشند بعد کمیات وضعیهٔ مرکز و طول شعاع هریک از آن ها را دریابید.

a) $x^2+y^2+12x-10y=0$ b) $5x^2+5y^2+14x+12y=0$

c) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ d) $3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$

e) $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

حلa: در معادله عمومی دایره $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$

چون $A=B$ است؛ پس معادله دایره می باشد.

$$-2h=12 \Rightarrow h=-6$$
$$-2k=-10 \Rightarrow k=5$$

پس مرکز آن نقطه $(-6,5)$ می باشد و شعاع آن:

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{36+25-0}=\sqrt{61}$

حل b:

$5x^2+5y^2+14x+12y=0$

چون A=B می باشد؛ پس معادله، معادله دایره می باشد.

اطراف را بر 5 تقسیم می کنیم:

$$x^2+y^2+\frac{14}{5}x+\frac{12}{5}y=0$$
$$x^2+\frac{14}{5}x+y^2+\frac{12}{5}y=0$$
$$x^2+\frac{14}{5}x+(\frac{7}{5})^2+y^2+\frac{12}{5}y+(\frac{6}{5})^2=(\frac{7}{5})^2+(\frac{6}{5})^2$$
$$(x+\frac{7}{5})^2+(y+\frac{6}{5})^2=\frac{17}{5}$$

پس: $C(-\frac{7}{5},-\frac{6}{5})$ و $r=\sqrt{\frac{17}{5}}$

حل c:

چون $A=B$ است؛ پس معادلهٔ دایره می باشد.

$$-2h=-6\Rightarrow h=3$$
$$-2k=4\Rightarrow k=-2$$

پس مرکز آن در نقطه (3,2) قرار دارد و شعاع آن:

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{9+4-13}=0$$

حل d:

چون $A=B=3$ است؛ پس معادله دایره می باشد.

اطراف معادله را بر 3 تقسیم می کنیم:

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}=0$$
$$-2h=-\frac{2}{3}\Rightarrow h=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad -2k=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

پس مرکز آن در نقطه $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ قرار دارد و شعاع آن:

$$r=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2-(-\frac{1}{3})}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4+1+3}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

پس معادله دایره $(x-\frac{1}{3})^2+[y-(-\frac{2}{3})]^2=(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2$ می باشد.

حل e: چون $A=B=a$ است؛ پس معادله دایره می باشد. اطراف را تقسیم a می کنیم.

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$
$$-2h=\frac{2g}{a}\Rightarrow h=-\frac{g}{a} \qquad -2k=\frac{2f}{a}\Rightarrow k=-\frac{f}{a}$$

پس مرکز آن در نقطه $(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a})$ قرار دارد و شعاع آن:

$$r=\sqrt{(-\frac{g}{a})^2+(-\frac{f}{a})^2-\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a}$$

یا:

$$x^2+2(x)(\frac{g}{a})+y^2+2(y)(\frac{f}{g})=\frac{-c}{a}$$

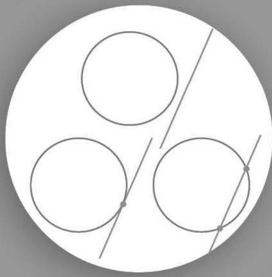
به هر دو طرف $\frac{f^2}{a^2}$ و $\frac{g^2}{a^2}$ را جمع می کنیم:

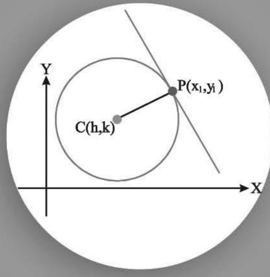
$$x^2+\frac{2gx}{a}+\frac{g^2}{a^2}+y^2+\frac{f^2}{a^4}+\frac{2fy}{a}=\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}$$

$$(x+\frac{g}{a})^2+(y+\frac{f}{a})^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}$$

$$\left[x-(\frac{-g}{a})^2\right]+\left[y-(\frac{-f}{a})\right]^2=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a}$$

$$\begin{cases} C(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a}) \\ r=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a} \end{cases}$$





حالات یک خط مستقیم با دایره
صفحهٔ کتاب (343)
وقت تدریس(2 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • بفهمند که چه وقت یک خط مستقیم دایره را در دو نقطه یا یک نقطه قطع می کند و یا در هیچ نقطه قطع نمی کند. • طریق یافتن معادله مماس و طول مماس را بیآموزند. • طریق یافتن کمیات وضعیه نقاط تقاطع خط مستقیم با دایره را دریافت کرده بتوانند. • کمیات وضعیه نقطه تماس یک خط مستقیم با دایره را دریافت کرده بتوانند. • طول مماس و معادله مماس را دریافت کرده بتوانند. • در حل مسایل ریاضی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. که جواب آن عبارت است از: این خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطعه می کند که نقاط تقاطع عبارت اند از: $(0,5)$ و $(-\frac{24}{5},\frac{7}{5})$

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

بعد از توضیح این که چه وقت خط مستقیم دایره را در دو نقطه، یک نقطه و یا در هیچ نقطه قطع نمی کند، مثال های(1)و(2) را با سهم گیری شاگردان حل کنید. فعالیت صفحه(344) را شاگردان حل کنند. که جواب آن این طور می باشد:

خط مستقیمی $x-y+1=0$ دایره $x^2+y^2-5=0$ را در نقاط $(-1,0)$ و $(2,3)$ قطع می کند.

بعد از این که طریق به دست آوردن معادله مماس توضیح شود. مثال های (1) و(2) صفحه(346) را با سهم گیری شاگردان حل کنید. در صورتیکه چارت شکل صفحه(347) موجود باشد و یا از شکل که روی تخته رسم شده باشد طریق یافتن طول مماس را توضیح کنید و مثال(3) را حل کنید و فعالیت این صفحه را شاگردان حل کنند. که جواب آن قرار زیر می باشد:

$$PT=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(2+4)^2-25}=\sqrt{36}=6$$

یا: $PT = \sqrt{x^2+y^2-6x+8y} = \sqrt{(-2)^2+2^2-6(-2)+8(2)} = \sqrt{4+4+12+16} = \sqrt{36} = 6$

تحکیم درس: (7) دقیقه

قسمتی از سؤال اول تمرین این درس حل شود.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

سؤال سوم تمرین این درس غرض ارزیابی درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

1- نقاط تقاطع یک خط مستقیم با یک دایره:

غرض یافتن نقاط تقاطع خط مستقیم $y = mx + c$ با دایره $x^2 + y^2 = a^2$ داریم که:

$y = mx + c$..................I $\qquad x^2 + y^2 = a^2$................II

قیمت y را از معادله I در II وضع می نماییم:

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$$
$$(1+m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0 \text{.....................III}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (2mc)^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) = a^2(1+m^2) - c^2$$

a) اگر $a^2(1+m^2) - c^2 > 0$ باشد خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می کند.

b) اگر $a^2(1+m^2) - c^2 = 0$ باشد خط مستقیم با دایره مماس می باشد.

c) اگر $a^2(1+m^2) - c^2 < 0$ باشد خط مستقیم دایره را قطع کرده نمی تواند.

2- شرط مماس بودن یک خط مستقیم با یک دایره عبارت است از:

$a^2(1+m^2) - c^2 = 0 \qquad c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

چون $y = mx + c$ می باشد؛ پس خط مستقیم $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ با تمام قیمت های m با دایره $x^2 + y^2 = a^2$ مماس می باشد. اگر از نقطه $A(x_1, y_1)$ با دایره $x^2 + y^2 = a^2$ دو مماس رسم گردد چون معادله یک مماس عبارت از $y_1 = mx_1 + a\sqrt{1+m^2}$ می باشد، پس:

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$
$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 - a^2 = 0$$

چون این معادله از جنس m یک معادله درجه دوم می باشد که برای دو قیمت m دو معادله مماس از نقطه $A(x_1, y_1)$ به دست می آید که حقیقی بودن و موهومی بودن آن به معادله فوق مربوط می باشد.

مثال: معادله های دو مماس از نقطه $(2,3)$ با دایره $x^2 + y^2 = 9$ عبارت اند از: $y = mx + 3\sqrt{1+m^2}$

چون از نقطه $(2,3)$ می گذرد، پس؛ $3 = 2m + 3\sqrt{1+m^2}$

$$(3-2m)^2 = 9(1+m^2) \Rightarrow m = 0, \frac{-12}{5}$$

اگر m=0 باشد داریم که: $y = 0 \cdot x + 3\sqrt{1+0} \Rightarrow y = 3$

و اگر $m=\frac{-12}{5}$ باشد داریم که: $y=\frac{-12}{5}x+3\sqrt{1+\frac{144}{25}} \Rightarrow 5y+12x-39=0$

مثال: معادله های دو مماس بر دایره $x^2+y^2=9$ در صورتی که مماس ها با خط مستقیم $3x+4y=7$ موازی باشد عبارت اند از:

هر خطی که موازی با خط $3x+4y=7$ باشد دارای معادله $3x+4y+k=0$ می باشد.

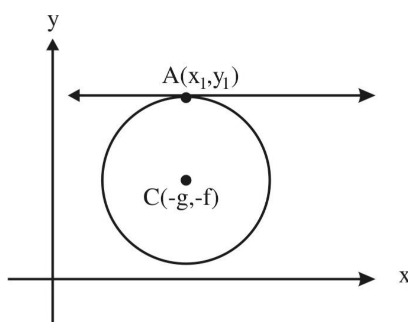
اگر خط $3x+4y+k=0$ مماس با دایره باشد؛ پس فاصله عمودی این خط از مرکز این دایره عبارت از طول شعاع است.

$$r=\frac{0+0+k}{\pm\sqrt{9+16}}=\pm\frac{k}{5}$$

پس $\pm\frac{k}{5}=3$ می باشد. در نتیجه $k=\pm 15$ می شود؛ پس معادله های مماس ها عبارت اند از:

$$3x+4y+15=0$$
$$3x+4y=15$$

3- دریافت معادلهٔ خط مستقیم که در یک نقطه داده شده با دایره مماس باشد:



اگر نقطه تماس $A(x_1,y_1)$ و معادله دایره که خط مستقیم با آن مماس باشد عبارت از:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

باشد که شعاع دایره

$$\overline{CA}=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

می باشد. که $\overline{CA}$ در نقطه A به خط مماس عمود است.

میل خط $\overline{CA}$ عبارت است از:

$$m=\frac{y_1+f}{x_1+g}\text{...............}I$$

پس میل مماس عبارت از $(-\frac{1}{m}=-\frac{x_1+g}{y_1+f})$ می باشد در نتیجه این قیمت را در معادله خط مستقیم $(y-y_1=m(x-x_1)$ عوض می نماییم؛ که معادله مماس عبارت است از:

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)\text{...............}II$$

بعد از ساده کردن معادله II داریم که:

$$(y-y_1)(y_1+f)+(x-x_1)(x_1+g)=0$$
$$yy_1+fy-y_1^2-fy_1+xx_1+gx-x_1^2-gx_1=0$$

به هردو طرف $2gx_1$ و $2fy_1$ را جمع نمایید.

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1 \text{..........III}$$

چون دایره از نقطه $A(x_1,y_1)$ می گذرد؛ پس داریم که:

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

یا $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1=-c$

از معادلهٔ III داریم که:

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

به طریق ساده: معادلهٔ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ را می توانیم طور زیر می بنویسیم:

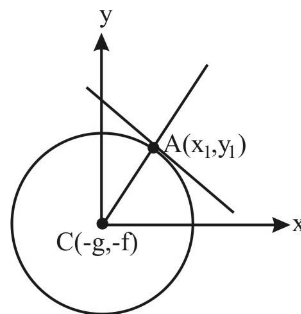
$$x\cdot x+y\cdot y+g(x+x)+f(y+y)+c=0$$

به عوض یک x_1,x و به عوض یک y_1,y را بنویسید. $x\cdot x_1+y\cdot y_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

اگر مرکز دایره در مبدأ کمیات وضعیه واقع باشد $(g=f=0)$ معادله مماس عبارت است از:

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

4- دریافت معادلهٔ خط مستقیمی که در نقطه $A(x_1,y_1)$ به دایره $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ عمود باشد.



میل خط عمود CA مساوی است به:

$$m_{CA}=\frac{y_1+f}{x_1+g}$$

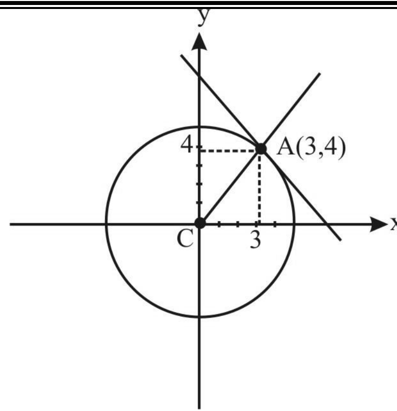
پس معادلهٔ خط عمود در نقطه $A(x_1,y_1)$ عبارت است از:

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$$

و اگر مرکز دایره در مبدأ کمیات وضعیه واقع باشد. $(g=f=0)$

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

مثال: معادله های خط عمود و مماس در نقطه (3,4) بادایره $x^2+y^2=25$ عبارت اند از:



میل خط CA عبارت از $m=\frac{4}{3}$ می باشد؛ پس معادلهٔ خط عمود در نقطهٔ $A(3,4)$ عبارت است از:

$$y-4=\frac{4}{3}(x-3)\Rightarrow 4x-3y=0$$

میل خط مماس در نقطه $A(3,4)$ عبارت از $-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4}$ می باشد.

پس معادلهٔ مماس $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$ و یا $3x+4y=25$ است.

یا برای دریافت معادلهٔ مماس، معادله دایره یی $x^2+y^2=25$ را به شکل $x\cdot x+y\cdot y=25$ می نویسیم و قیمت های 3 و 4 را وضع می نماییم داریم که:

$$x\cdot x+y\cdot y=25\Rightarrow 3x+4y=25$$

5- در معادلهٔ عمومی دایره $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ چهار ثابت (a,g,f,c) می باشند. اگر این معادله بر a تقسیم گردد سه ثابت $\frac{g}{a},\frac{f}{a},\frac{c}{a}$ به دست می آید. برای محاسبه کردن این سه ثابت و تعین موقعیت دایره حد اقل به سه رابطه ضرورت می باشد که این ثابت ها را داشته باشند این سه رابطه در یکی از حالات زیر شاید داده شده باشد.

a) سه نقطه که بالای محیط دایره واقع باشد.

b) دو نقطه محیط دایره و مرکز دایره بالای خط مستقیم داده شده واقع باشد.

c) معادلهٔ مماس بر دایره و یک نقطهٔ که دایره از آن می گذرد و مرکز دایره بالای خط مستقیم داده شده واقع باشد.

d) شعاع دایره و نقطهٔ تماس، خط مماس بر دایره داده شده باشد.

6- معادلهٔ دایره یی که از نقطه $(-2,-5)$ می گذرد و در نقطه $(4,3)$ با خط مستقیم $3x+4y-24=0$ مماس باشد عبارت است از:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

چون نقاط $(-2,-5)$ و $(4,3)$ روی محیط دایره واقع اند داریم که:

$$-4g-10f+c+29=0\ldots\ldots\ldots\ldots II$$

$$8g+6f+c+25=0\ldots\ldots\ldots\ldots III$$

چون خط مستقیم $3x+4y-24=0$ با دایره در نقطه $(4,3)$ مماس می باشد. معادلهٔ خط مستقیم که از نقطهٔ $(4,3)$ می گذرد و بر خط مستقیم $3x+4y-24=0$ عمود باشد عبارت است از:

$y-3=\frac{4}{3}(x-4)$ یا $4x-3y-7=0$

این خط مستقیم که از نقطه (4,3) می گذرد و عمود بردایره یی می باشد که مرکز آن (−g,−f) و معادلۀ آن $x^2+y^2+2gx+2fg+c=0$ می باشد، پس:

$-4g+3f-7=0$..................V

از معادلۀ II معادلۀ III را تفریق می کنیم داریم که:

$-12g-16f+4=0$

$3g+4f-1=0$..................VI

از حل معادلات (V) و (VI) داریم که: $f=1$ و $g=-1$

اگر قیمت های f و g در معادلۀ III وضع شود داریم: $(c=-23)$ در نتیجه معادله دایره مطلوب عبارت است از:

$x^2+y^2-2x+2y-23=0$

7- طور زیر نشان داده می شود که دایره هایی

$x^2+y^2-6x-6y+10=0$..............I

و

$x^2+y^2=2$..................II

باهم متقاطع اند و نیز کمیات وضعیه نقاط تقاطع عبارت اند از:

اگر معادلۀ II از معادلۀ I تفریق شود، در نتیجه $-6x-6y+12=0$ می شود.

$x+y-2=0 \Rightarrow x=2-y$..................III

این قیمت x را در معادله II وضع می کنیم:

$(2-y)^2+y^2-2=0 \Rightarrow 4-4y+y^2+y^2-2=0$

$2y^2-4y+2=0 \Rightarrow y^2-2y+1=0$

$(y-1)^2=0 \Rightarrow y=1$

قیمت y را در معادلۀ III وضع کنید. در نتیجه x=1 می شود کمیات وضعیه نقطه تماس عبارت از (1،1) می باشد.

8- قیمت a که خط مستقیم x-2y=6 با دایره $x^2+y^2-2ax-4=0$ مماس باشد عبارت است از:

از معادلۀ خط مستقیم داریم که x=2y+6

$(2y+6)^2+y^2-2a(2y+6)-4=0 \Rightarrow 4y^2+24y+36+y^2-4ay-12a-4=0$

$5y^2+(24-4a)y+(32-12a)=0$

چون خط مستقیم با دایره مماس می باشد باید $\Delta=0$ باشد.

$b^2-4ac=(24-4a)^2-4(5)(32-12a)=0$

$16a^2+48a-64=0$

$a^2+3a-4=0$

$(a+4)(a-1)=0 \Rightarrow a=-4 \quad a=1$

9- اگر دو دایره که مرکز های آن O_1 و O_2 باشد و در نقاط A و B یکدیگر را قطع کند. اگر معادلۀ دایره با مرکز

O_1 عبارت از: $x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$

و معادله دایره دومی $x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$ باشد؛ چون نقاط A و B بالای محیط هر دو دایره واقع اند؛ پس مختصات نقاط A و B در سیستم معادلات ذیل

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$$

باید صدق کند و در نتیجه در معادله

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+d_1-d_2=0$$

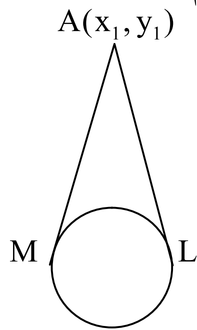
نیز باید صدق کند؛ بنابر این، این معادله، معادلهٔ وتر مشترک دو دایره می باشد. و نیز از نقاط A و B فقط یک خط مستقیم می گذرد.

طور مثال: معادله وتر مشترک دو دایره یی $x^2+y^2-4x-6y-14=0$ و $x^2+y^2+6x+8y=0$ عبارت است از: $[6-(-4)]x+[8-(-6)]y+0-(-14)=0$

بعد از ساده کردن داریم: $5x+7y+7=0$ که معادلهٔ وتر مشترک دودایره داده شده می باشد.

10- اگر از کدام نقطه $A(x_1,y_1)$ خارج دایره دو مماس با دایره رسم گردد طول هر دو مماس باهم مساوی می باشد و عبارت است از:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$$



11- معادلهٔ دایره های را دریابید که مرکز آن $c_1(4,-7)$ و دایره یی $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ به آن دایره ها داخلاً و خارجاً مماس باشد.

$c_1(4,-7)$

حل: مرکز دایره داده شده $c_2(-2,1)$ می باشد.

$$|C_1C_2|=r_1+r_2=\sqrt{(4+2)^2+(-7,-1)^2}=10$$

چون در معادلهٔ دایره داده شده $f=1, g=-2$ و $c=1$ می باشد؛ پس شعاع آن عبارت است از:

$$r_2=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(1)^2-1}=2$$
$$r_1=10-r_2=10-2=8$$

r_1 عبارت از شعاع دایره ایست که دایره داده شده با آن خارجاً مماس باشد و معادلهٔ آن عبارت است از:

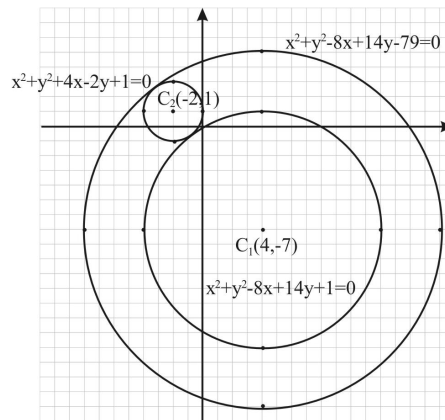
$$(x-4)^2+(y+7)^2=(8)^2$$
$$x^2+y^2-8x+14y+1=0$$

شعاع دایره یی که دایره داده شده با آن داخلاً مماس باشد عبارت است از:

شعاع $=r_1+2r_2=8+2(2)=12$

پس معادلهٔ این دایره عبارت است از:

$$(x-4)^2+(y+7)^2=(12)^2$$
$$x^2+y^2-8x+14y-79=0$$



جواب به سؤال های تمرین

1- حالات خطوط مستقیم را با دایره هایی که معادله های آن ها در زیر داده شده اند بررسی کنید.

معادله های خطوط مستقیم	معادله های دایره	
$3x-2y+3=0$	$x^2+y^2-4x-y-3=0$	$a)$
$x-y-1=0$	$2(x^2+y^2)-3x+2y-6=0$	$b)$
$5x-y=11$	$x^2+y^2+x-9y+14=0$	$c)$

حل جزء a: قیمت y را از معادلهٔ خط مستقیم به دست می آوریم:

$$-2y=-3x-3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$$

قیمت y را در معادلهٔ دایره وضع می کنیم:

$$x^2+(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2})^2-4x-(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2})-3=0$$
$$x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{4}-4x-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-3=0$$
$$13x^2-4x-9=0$$
$$x=\frac{4\pm 22}{26} \Rightarrow x_1=1 \quad , \quad x_2=-\frac{9}{13}$$
$$x_1=1 \Rightarrow y_1=3$$
$$x_2=-\frac{9}{13} \Rightarrow y_2=\frac{6}{13}$$

پس این خط مستقیم در نقاط $(1,3)$ و $(-\frac{9}{13},\frac{6}{13})$ این دایره را قطع می کند.

حل b:

$$x-y-1=0 \Rightarrow -y=-x+1 \Rightarrow y=x-1$$

قیمت y را در معادلهٔ دایره وضع می کنیم:

$2[x^2+(x-1)^2]-3x+2(x-1)-6=0$

$2x^2+2x^2-4x+2-3x+2x-2-6=0$

$4x^2-5x-6=0$

$\Delta=25-4\cdot4(-6)=25+96=121$

$x_1=\frac{5+\sqrt{121}}{8}=\frac{5+11}{8}=\frac{16}{8}=2 \qquad x_2=\frac{5-11}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$

$y=1 \qquad y=\frac{-3}{9}-1=-\frac{7}{4}$

نقاط تقاطع $(2,1)$ و $(\frac{-3}{4},\frac{-7}{4})$ می باشد.

حل c: $y=5x-11$ می شود اگر قیمت y در معادلهٔ دایره عوض شود داریم که:

$x^2+(5x-11)^2+x-9(5x-11)+14=0$

$x^2+25x^2-110x+121+x-45x+99+14=0$

$26x^2-156x+243=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0 \Rightarrow x=3 \quad , \quad y=4$

این خط مستقیم در نقطه $(3,4)$ با دایره مماس می باشد.

2- معادلهٔ خط مستقیم را دریابید که در نقطه $(2,-3)$ با دایره $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ مماس باشد.

حل:

$-2h=-2 \Rightarrow h=1$

$-2k=4 \Rightarrow k=-2$

چون مرکز دایره در نقطه $(1,-2)$ می باشد و $(2,-3)$ نقطه از محیط دایره است؛ پس $(1,-2)$ و $(2,-3)$ نقاط انجام های قطعه خط مستقیم شعاع می باشد که معادله آن:

$y+2=\frac{-3+2}{2-1}(x-1) \Rightarrow y+1=-(x-1) \qquad y=-x-1$

حال معادلهٔ خط مستقیم را به دست می آوریم که از نقطه $(2,-3)$ می گذرد و میل آن m_1 باشد.

$m_1\cdot m_2=-1 \Rightarrow m_1(-1)=-1 \Rightarrow m_1=1$

پس معادلهٔ خط مستقیم که در نقطه $(2,-3)$ با دایره مذکور مماس باشد عبارت است از:

$y+3=1(x-2)$

$y=x-5$

به طریق دوم:

$-g=1 \Rightarrow g=-1$

$-f=-2 \Rightarrow f=2$

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

چون $x_1=2$ و $y_1=-3$ می باشد.

$2x-3y-(x+2)+2(y-3)+3=0$

$x-y-5=0 \qquad y=x-5$

3- طول مماس را که از نقطهٔ $(-5,4)$ به دایرهٔ $5x^2+5y^2-10x+15y-131=0$ رسم شده است دریابید.

حل: اطراف معادلهٔ دایره را تقسیم 5 می نماییم داریم که:

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{131}{5}=0$$

$$=\sqrt{(-5)^2+(4)^2-2(-5)+3(4)-\frac{131}{5}}=\sqrt{25+16-10+12-\frac{131}{5}}=\sqrt{43-\frac{131}{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{215-131}{5}}=\sqrt{\frac{184}{5}}$$

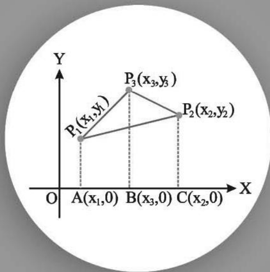
4- طول مماس را که از نقطهٔ $(-2,-5)$ به دایرهٔ $x^2+y^2+8x-5y=7$ ترسیم شده دریابید.

حل:

$$\text{طول مماس}=\sqrt{(x^2+y^2)+8x-5y-7}$$

$$=\sqrt{(-2^2)+(-5^2)+8(-2)-5(-5)-7}=\sqrt{4+25-16+25-7}$$

$$=\sqrt{54-23}=\sqrt{31}$$



دریافت مساحت مثلث در صورتی که کمیات وضعیه رأس های مثلث معلوم باشند

صفحهٔ کتاب (349)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

<table>
<tr><td>اهداف آموزشی
- دانشی
- مهارتی
- ذهنیتی</td><td>شاگردان در اخیر این درس باید:
• طریق به دست آوردن مساحت مثلث را در صورتی که کمیات وضعیهٔ رأس های آن معلوم باشد بیآموزند.
• مساحت مثلث را از روی کمیات وضعیه رأس های مثلث دریافت کرده بتوانند.
• در حل مسایل هندسی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.</td></tr>
<tr><td>روش های تدریس</td><td>سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...</td></tr>
<tr><td>مواد درسی و مواد ممد درسی</td><td>کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و ...</td></tr>
<tr><td>توضیح ورودی (5) دقیقه</td><td>بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود و استاد محترم آن ها را همکاری نماید. که جواب آن قرار زیر می باشد:
$(-3,6)=(x_1y_1)\qquad(3,2)=(x_2y_2)\qquad(6,0)=(x_3y_3)$
$A=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$
$=\frac{1}{2}[-3(2-0)+3(0-6)+6(6-2)]=0$
پس این سه نقطه روی یک خط مستقیم قرار دارد.</td></tr>
<tr><td colspan="2">فعالیت جریان درس: (28) دقیقه
بعد از توضیح طریق به دست آوردن فورمول مساحت از روی کمیات وضعیه نقاط راس های مثلث مثال این صفحه را با سهم گیری شاگردان حل کنید.</td></tr>
<tr><td colspan="2">تحکیم درس: (7) دقیقه
سؤال(1) تمرین این درس حل شود.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ارزیابی درس: (5) دقیقه
سؤال دوم تمرین از شاگردان پرسیده شود.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8- معلومات اضافی برای معلم
• مثال این درس را به این طریق نیز حل کرده می توانیم:</td></tr>
</table>

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad |A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

R_2-R_1 و R_3-R_1

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}[1(6-1)]=\frac{5}{2}=2{,}5$$

- اگر راس های یک مثلث $(a,b+c),(a,b-c)$ و $(-a,c)$ باشند مساحت این مثلث مساوی ا ست به:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ a & b-c & 1 \\ -a & c & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ 0 & -2c & 0 \\ -a & c & 1 \end{vmatrix} \quad (R_2-R_1)$$

نظر به سطر دوم انکشاف داده شده است: $=\frac{1}{2}[-2c(a+a)]=-2ac \Rightarrow A=2ac$

1- برای دریافت مساحت یک مثلث که کمیات وضعیه سه رأس آن داده شده باشد فورمول زیر در کتاب درسی به دست آورده شده است؛ $A=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

اما غرض معلومات بیشتر استاد محترم مساحت مثلث را توسط دیترمینانت (determinant) نیز به دست آروده می توانیم.

اگر $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ و (x_3,y_3) سه راس مثلث باشد:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

اگر قیمت دیترمینانت A را توسط ستون اول به دست آوریم فورمول:

$$|A|=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

به دست می آید.

در شکل P_3,P_2,P_1 جهت مخالف عقربه ساعت (Counter clockwise) در نظر گرفته شده است، اگر نقاط به جهت حرکت عقربه ساعت (Clockwise) در نظر گرفته شود، امکان دارد قیمت عددی مساحت مثلث منفی به دست آید؛ از علامت منفی صرف نظر می شود یا به عبارت دیگر قیمت مطلقهٔ آن در نظر گرفته می شود.

2- اگر قیمت دیترمینانت صفر شود، به این معنی است که نقاط P_3,P_2,P_1 بالای یک خط مستقیم قرار دارد.

3- مساحت مثلث های که راس های B,A و C آنها داده شده اند قرار زیر می باشد؛ مساوی است به:

$A(0,0)=(x_1,y_1) \qquad B(2,4)=(x_2,y_2) \qquad C(-2,2)=(x_3,y_3)$

$A(-1,-2)=(x_1,y_1) \qquad B(2,5)=(x_2,y_2) \qquad C(5,2)=(x_3,y_3)$

مساحت مثلث اول:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[0-0+1(4+8)]=6$$ توسط سطر اول:

مساحت مثلث دوم:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[-1(5-2)+2(2-5)+1(4-25)]=-15$$ توسط سطر اول:

پس مساحت مثلث 15 واحد سطح می باشد.

4- مساحت مثلثی که کمیات وضعیه راس های آن $A(5,3)$، $B(-2,2)$ و $C(4,2)$ باشند مساوی به 3 واحد سطح می باشند.

و مساحت مثلثی که راس های آن $A(2,3)$، $B(-1,1)$ و $C(4,-5)$ باشند مساوی به 14 واحد سطح می باشد.

جواب به سؤال های تمرین

1. مساحت مثلثی را دریابید که راس های آن $A(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{0})$، $B(\overset{x_2}{8},\overset{y_2}{6})$ و $C(\underset{x_3}{12},\underset{y_3}{4})$ باشند.

حل:

$$\text{مساحت}\quad \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[0(6-4)+8(4-0)+12(0-6)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[32-72\right]=16-36=|-20|=20$$

2. مساحت مثلث را دریابید که رأس های آن $A(4,0)$، $B(-4,0)$ و $C(0,3)$ باشد.

حل:

$$\text{مساحت}\ \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$
$$=\frac{1}{2}[4(0-3)+(-4)(3-0)+0(0-0)]=\frac{1}{2}[-12-12]=|12|=12$$

3. مساحت چهار ضلعی را دریابید که رأس های آن $A(1,0)$،$B(6,2)$،$C(8,6)$ و $D(2,4)$ باشند.

حل: اگر یک قطر چهار ضلعی را رسم کنیم دو مثلث ABC و ACD به دست می آید که مجموع مساحت هر دو مثلث به مساحت چهار ضلعی مذکور مساوی میشود.

طریق اول:

$$\text{مساحت}\ \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}[1(2-6)+6(6-0)+8(0-2)]=\frac{1}{2}(-4+36-16)=8$$
$$\text{مساحت}\ \overset{\Delta}{ACD}=\frac{1}{2}[1(4-6)+2(6-0)+8(0-4)]=\frac{1}{2}[-2+12-32]=11$$

در نتیجه مساحت ا ین چهار ضلعی مساوی است به $8+11=19$

طریق دوم: مجموع مساحت ABC و ACD عبارت از مساحت چهار ضلعی می باشد.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\6 & 2 & 1\\8 & 6 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\8 & 6 & 1\\2 & 4 & 1\end{vmatrix}$$ توسط انکشاف سطر اول (R_1)

$$=\frac{1}{2}[1(2-6)-0+1(36-16)]+\frac{1}{2}[1(6-4)-0+1(32-12)]$$

$$=\frac{1}{2}(-4+20)+\frac{1}{2}(2+20)=8+11=19$$

حل تمرین فصل

1. فاصله بین هر جوره نقاط داده شدۀ زیر را دریابید و نیز کمیات وضعیه نقاط تنصیف خط های مستقیمی که از این دو نقطه A و B می گذرد دریابید.

$a: \quad A(3,1) \qquad B(-2,-4)$

$b: \quad A(-8,3) \qquad B(2,-1)$

$c: \quad A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3}) \qquad B(-3\sqrt{5},5)$

حل جزء a:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

کمیات وضعیه نقطه تنصیف خط مستقیم AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+(-2)}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1+(-4)}{2}=-\frac{3}{2}$$

پس کمیات وضعیۀ نقطۀ تنصیف خط مستقیم AB عبارت است از: $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

حل جزء b:

$$\overline{AB}=\sqrt{[2-(-8)]^2+(-1-3)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$$

کمیات وضعیۀ نقطۀ تنصیف عبارت اند از:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-8+2}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3-1}{2}=1 \qquad \Rightarrow (-3,1)$$

حل جزء c:

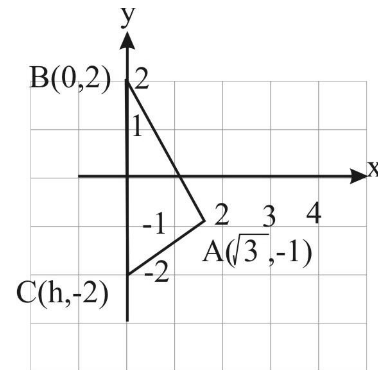
$$AB=\sqrt{[-3\sqrt{5}-(-\sqrt{5})]^2+[5-(-\frac{1}{3})]^2}=(\sqrt{5}-3\sqrt{5})^2+(5+\frac{1}{3})^2=20+\frac{256}{9}=\sqrt{\frac{436}{9}}=\frac{2\sqrt{109}}{3}$$

کمیات وضعیۀ نقطۀ تنصیف:

$$x=\frac{-\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{2}=-\frac{4\sqrt{5}}{2}=-2\sqrt{5}$$
$$y=\frac{-\frac{1}{3}+5}{2}=\frac{\frac{14}{3}}{2}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3} \qquad (-2\sqrt{5},\frac{7}{3})$$

2. اگر $A(\sqrt{3},-1)$, $B(0,2)$ و $C(h,-2)$ راس های یک مثلث قایم الزاویه باشد و $\hat{A}=90^\circ$ قیمت h را دریابید.

حل: چون مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه میباشد نظر به قضیه فیثاغورث داریم که:



$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$AC^2 = (h-\sqrt{3})^2 + (-2+1)^2$$
$$AC^2 = h^2 - 2\sqrt{3}\cdot h + 3 + 1$$
$$AC^2 = h^2 - 2\sqrt{3}h + 4$$
$$AB^2 = (\sqrt{3}-0)^2 + (-1-2)^2 = 3 + 9 = 12$$
$$BC^2 = (h-0)^2 + (-2-2)^2 = h^2 + 16$$
$$h^2 + 16 = h^2 - 2\sqrt{3}h + 4 + 12 \Rightarrow -2\sqrt{3}h = 0 \Rightarrow h = 0$$

3. کمیات وضعیۀ نقطۀ p را طوری دریابید که خطی را که از نقاط $A(1,4)$ و $B(5,6)$ میگذرد به نسبت $\frac{AP}{PB} = 2$ تقسیم کند.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r+1} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$
$$x = \frac{1 + 2\cdot 5}{2+1} = \frac{11}{3} \qquad y = \frac{4 + 2(6)}{2+1} = \frac{16}{3}$$

کمیات وضعیۀ نقطۀ P عبارت ست از: $P(\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$

4. معادلۀ خط مستقیمی را دریابید که میل آن (-2) و محور y را در 3 قطع کند.

حل:

$$y = mx + b$$
$$y = -2x + 3$$

5. میل خطوط $x = \sqrt{7}$ و $y = -\sqrt{7}$ را دریابید.

حل: میل خط مستقیم $x = \sqrt{7}$ تعریف نه شده است و میل خط مستقیم $y = -\sqrt{7}$ صفر می باشد.

6. میل محور y مساوی است به:

$a)-1 \quad b)1 \quad c)0 \quad d)$ تعریف نشده است جواب: جزء d صحت دارد.

7. میل یک خط مستقیم $m = \frac{2}{3}$ می باشد میل خط که عمود بر این خط مستقیم باشد مساوی است به:

$a)\frac{2}{3} \qquad b)-\frac{2}{3} \qquad c)\frac{3}{2} \qquad d)-\frac{3}{2}$

حل: چون شرط عمودیت $m_1 \cdot m_2 = -1$ می باشد؛ پس:

$$\frac{2}{3}\cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -1\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

جزء d صحت دارد.

8. میل خطوط مستقیم را دریابید که از هر جوره نقاط داده شدۀ زیر میگذرد.

$a).(-2,4)\ ,\ (5,11) \qquad b).(3,-2)\ ,\ (2,7) \qquad c).(4,6)\ ,\ (4,8)$

حل جزء a:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11-4}{5-(-2)} = \frac{7}{7} = 1$$

حل جزء b:

$$m = \frac{7-(-2)}{2-3} = \frac{7+2}{-1} = \frac{9}{-1} = -9$$

حل جزء c:

$$m = \frac{8-6}{4-4} = \frac{2}{0} \text{ (تعریف نشده)}$$

9. خطوط مستقیم $4x - y + 2 = 0$ و $12x - 3y + 1 = 0$ با هم:

a) موازی اند. b) عمود اند. c) نه موازی اند و نه عمود.

حل:

$$4x - y + 2 = 0 \Rightarrow -y = -4x - 2 \Rightarrow y = 4x + 2$$

$$12x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow -3y = -12x - 1 \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{3}$$

چون $m_1 = m_2$ میباشد؛ پس این خطوط مستقیم با هم موازی اند.

جزء a صحت دارد.

10. فاصله بین خط مستقیم $3x - 4y + 3 = 0$ و خط مستقیم $3x - 4y + 7 = 0$ را دریابید.

حل: چون میل های شان با هم مساوی اند؛ پس با هم موازی می باشند. حال یک نقطه یی یک خط مستقیم را دریافت می نماییم.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$(0, \frac{3}{4})$ یک نقطه خط مستقیم اولی می باشد که فاصله آن از خط مستقیم دومی عبارت است از:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|3(0) + (-4)(\frac{3}{4}) + 7\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \text{ (واحد طول)}$$

11. معادلهٔ خط مستقیم را دریابید که از نقطه $(-4,7)$ می گذرد و با خط مستقیم $2x - 7y + 4 = 0$ موازی باشد.

حل:

$$2x - 7y + 4 = 0$$
$$-7y = -2x - 4$$
$$\Rightarrow 7y = 2x + 4$$
$$\Rightarrow y = \frac{2}{7}x + \frac{4}{7}$$
$$y - 7 = \frac{2}{7}(x + 4)$$
$$7y - 49 = 2x + 8$$
$$-2x + 7y - 57 = 0$$
$$2x - 7y + 57 = 0$$

12. فاصلهٔ نقطهٔ $P(6,-1)$ از خط مستقیم $6x - 4y + 9 = 0$ را دریابید.

حل:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d=\frac{|6(6)+(-4)(-1)+9|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{36+4+9}{\sqrt{36+16}}=\frac{49}{\sqrt{52}}$$

13. کمیات وضعیهٔ نقطهٔ P را دریابید که خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ را که از نقاط $P_1(2,-5)$ و $P_2(6,3)$ می گذرد داخلاً به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کند.

حل:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{2+\frac{3}{4}\cdot 6}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{7}{4}}=\frac{13}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{26}{7}$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{-5+\frac{3}{4}\cdot 3}{\frac{7}{4}}=\frac{\frac{-20+9}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{-11}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{-11}{7}$$

$$P(x,y)=(\frac{26}{7},\frac{-11}{7})$$

14. معادله های خطوط مستقیم زیر را به شکل نورمال آن تبدیل کنید.

$a).\ 2x+5y-2=0$ $\qquad$ $b).\ 2y-6x+4=0$ $\qquad$ $c).\ 2x-3y+6=0$

حل جزء a: هر دو طرف معادله را بر $\sqrt{2^2+5^2}=\pm\sqrt{29}$ تقسیم می کنیم برای اینکه طرف راست مساوات مثبت باشد $\sqrt{29}$ را در نظر می گیریم داریم که:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{2}{\sqrt{29}}y-\frac{5}{\sqrt{29}}=0 \qquad \text{و یا} \qquad \frac{2x+5y-2}{\sqrt{29}}=0$$

چون sin و $\cos\theta$ هر دو مثبت اند؛ پس θ در ناحیهٔ اول قرار دارد.

از جدول مثلثاتی دریافت می نماییم که sin کدام زاویه $\frac{2}{\sqrt{29}}$ و cos کدام زاویه $\frac{5}{\sqrt{29}}$ میباشد زاویه را دریافت نموده و به عوض آن در فورمول می گذاریم.

15. میل خط مستقیم که از نقاط $(4,0)$ و $(-4,0)$ می گذارد مساوی است به:

$a)\ 1$ $\quad$ $b)\ -1$ $\quad$ $c)\ 0$ $\quad$ $d)$ تعریف نه شده است

حل:

$$m=\frac{0-0}{-4-4}=\frac{0}{-8}=0$$

جزء c صحت دارد.

16- معادله خط مستقیم را دریابید که طول نورمال آن 10 واحد بوده و نورمال با جهت مثبت محور x زاویهٔ 30° را میسازد.

حل:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$
$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 10 = 0$$
$$x(\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) - 10 = 0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 10 = 0 \Rightarrow \sqrt{3x} + y - 20 = 0$$

17. مساحت مثلث را دریابید که رأس های آن مثلث $A(2,3)$, $B(-1,1)$ و $C(4,-5)$ باشند.

حل: چون داریم که:

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$
$$= \frac{28}{2} = 14 \text{ (واحد سطح)}$$

18. مساحت مثلث که رأس های آن $A(1,4)$, $B(2,-3)$ و $C(3,-10)$ باشد مساوی است به:

$a).1$ $b).2$ $c).0$ $d).$ هیچکدام

حل:
$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$
$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[1(-3+10) + 2(-10-4) + 3(4+3)]$$
$$= \frac{1}{2}(7 - 28 + 21) = 0$$

جزء c صحت دارد. بدین معنی که این سه نقطه بالای یک خط مستقیم قرار دارند.

19. کمیات وضعیهٔ نقطهٔ تقاطع خط مستقیم $x + 2y = 6$ با دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 39 = 0$ را دریابید.

حل: از معادله خط مستقیم چون $x = -2y + 6$ و این قیمت را در معادلهٔ دایره به عوض آن وضع می کنیم:

$$x = -2y + 6$$
$$(-2y+6)^2 + y^2 - 2(-2y+6) - 2y - 39 = 0$$
$$4y^2 - 24y + 36 + y^2 + 4y - 12 - 2y - 39 = 0$$
$$5y^2 - 22y - 15 = 0$$
$$\Rightarrow y = 5, -\frac{3}{5}$$

پس نقاط تقاطع عبارت اند از: $(\frac{36}{5}, -\frac{3}{5})$ و $(-4,5)$

20. معادله دایره را بنویسید که از نقاط $A(1,1)$ و $B(2,-1)$ و $C(3,-2)$ می گذرد.

حل: چون معادلهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

معادله عمومی دایره می باشد به عوض x و y مختصات نقاط A ، B و C را وضع می کنیم؛ زیرا نقاط مذکور بالای محیط دایره واقع اند و سه معادلهٔ سه مجهوله بدست می آید که آنرا همزمان حل می نماییم و قیمت های a، b و c را دریافت نموده در معادلهٔ عمومی معادله به عوض آن وضع می کنیم معادلهٔ مطلوب به دست می آید:

$$1+1+a+b+c=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+2=0..................(I) \\ 2a-b+c+5=0.................(II) \\ 3a-2b+c+13=0............(III) \end{cases}$$
$$4+1+2a-b+c=0$$
$$9+4+3a-2b+c$$

$$\begin{matrix} -a+2b-3=0 \\ -a+b-8=0 \end{matrix} \Rightarrow b=-5 \Rightarrow -a-10-3=0, \quad a=-13$$

$$-13-5+c+2=0 \Rightarrow c=16$$

معادلهٔ مطلوب دایره: $x^2+y^2-13x-5y+16=0$ می باشد.

طریق دوم:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.................I$$
$$2+2g+2f+c=0..........................II$$
$$5+4g-2f+c=0..........................III$$
$$13+6g-4f+c=0........................IV$$

اگر معادله II از معادله III تفریق شود داریم که:

$$3+2g-4f=0...................V$$

معادله III را از معادله IV تفریق می کنیم داریم که:

$$8+2g-2f=0...................VI$$

اگر معادله V از معادله VI تفریق شود داریم که:

$$5+2f=0 \Rightarrow f=\frac{-5}{2}$$

قیمت f را در معادله VI وضع می کنیم:

$$8+2g-2(\frac{-5}{2})=0 \Rightarrow g=\frac{-13}{2}$$

حال قیمت های g و f را در معادله II وضع می کنیم:

$$2+2(\frac{-13}{2})+2(\frac{-5}{2})+c=0 \Rightarrow c=16$$

قیمت های f,c و g را در معادله I وضع می نماییم پس معادله مطلوب عبارت است از:

$$x^2+y^2-13x-5y+16=0$$

21. معادلهٔ دایره را بنوسید که از نقاط $A(3,-1)$ و $B(0,1)$ می گذرد و مرکز آن روی خط $4x-3y-3=0$ واقع باشد.

حل: اگر $C(h,k)$ مرکز دایره بالای خط مستقیم واقع باشد پس:

$$4h-3k-3=0............. I$$

و همچنان (شعاع دایره) $|OA|=|OB|$

$$(h-0)^2+(k-1)^2=(h-3)^2+(k+1)^2$$
$$h^2+k^2-2k+1=h^2+k^2-6h+2k+1$$
$$-6h+4k+9=0.................II$$

ویا

از حل همزمان معادلهٔ I و II داریم که:

$$\begin{cases}-6h+4k+9=0\\ 4k-3k-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-18h+12k+27=0\\ \underline{16h-12k-12=0}\end{cases}$$

$$-2h+15=0$$

$$h=\frac{15}{2}$$

$$-6(\frac{15}{2})+4k+9=0$$

$$-45+4k+9=0\Rightarrow\ 4k=36$$

$$k=\frac{36}{4}=9$$

$$r^2=(\frac{15}{2})^2+(9-1)^2=\frac{225}{4}+64=\frac{481}{4}$$

$r^2=\frac{481}{4}\Rightarrow(x-\frac{15}{2})^2=\frac{481}{4}$ ویا $x^2+y^2-15x-18y+17=0$

22- کمیات وضعیهٔ مرکز و طول شعاع دایره یی را دریابید که معادلهٔ آن $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ باشد.

حل: اطراف معادله را تقسیم 4 می کنیم.

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{25}{4}=0$$

$$-2h=-2\quad\Rightarrow h=1$$

$$-2k=3\qquad\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

مرکز دایره $(h.k)=(1.-\frac{3}{2})$

و طول شعاع آن: $r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{4+9+25}{4}}=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$

23 – معادلهٔ دایره را دریابیدکه از نقاط $A(4,1)$ و $B(6,5)$ بگذرد و مرکز آن روی خط مستقیم $4x+y-16=0$ واقع باشد.

حل: اگر مرکز دایره $C(h,k)$ باشد؛ پس:

$$|CA|=|CB|$$

$$\left|(h-4)^2+(k-1)^2\right|=\left|(h-6)^2+(k-5)^2\right|$$

$$h^2-8h+16+k^2-2k+1=h^2-12h+36+k^2-10k+25$$

$$\Rightarrow 4h+8k-44=0\Rightarrow\begin{cases}h+2k-11=0...I\\ 4h+k-16=0...II\end{cases}$$

$$\begin{cases}\quad h+2k-11=0\\ _\,8h\pm 2k_{\mp}32=0\end{cases}$$

$-7h+21\Rightarrow h=3\quad\Rightarrow k=-12+16\Rightarrow k=4$ یا

$$r^2=(h-4)^2+(k-1)=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

معادلهٔ دایره: $(X-3)^2+(Y-4)^2=10$ و یا:

$$x^2-6x+9+y^2-8y+16=10$$
$$x^2+y^2-6x-8y+25=10$$
$$x^2+y^2-6x-8y+15=10$$

24- اگر رأس های یک مثلث $A(5,-6)$, $B(-3,5)$ و $C(-1,2)$ باشند این مثلث:

مختلف الاضلاع می باشد(c   متساوی الساقین می باشد (b   متساوی الاضلاع می باشد(a

حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+(5+6)^2}=\sqrt{185}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(-1-5)^2+(2+6)^2}=\sqrt{100}=10$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-1+3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

در نتیجه مثلث مختلف الاضلاع بوده و جزء c صحت دارد.

25- اگر مختصات رأس های یک مثلث به ترتیب $A(5,4)$ $B(4,10)$ و $C(7,8)$ باشد این مثلث:

متساوی الساقین می باشد(c   مختلف الاضلاع می باشد(b   متساوی الاضلاع می باشد(a

حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-5)^2+(10-4)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(5-7)^2+(4-8)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(7-4)^2+(8-10)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

به ملاحظه میرسد که مثلث مختلف الضلاع می باشد و جزء b صحت دارد.

26- اگر $p(-8,4)$ و $Q(2,-1)$ باشند مختصات نقطهٔ A را دریابید که اگر نقطهٔ A خط PQ را داخلاً و خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم کند.

حل:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-8+(\frac{2}{3})\cdot 2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-24+4}{3}}{\frac{3+2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{4+\frac{2}{3}(-1)}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}=2$$

نقطهٔ $A(-4,2)$ خط داده شده را داخلاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می کند.

$$x=\frac{-8+(-\frac{2}{3})\cdot 2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-28}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{-28}{3}\cdot\frac{3}{1}=-28$$

$$y=\frac{4+(-\frac{2}{3})(-1)}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{12+2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{14}{3}\cdot\frac{3}{1}=14$$

و نقطهٔ $A(-28,14)$ خط داده شده را خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می کند.

طریق دوم:

$$P(x,y)=\left[\frac{(2)(2)+3(-8)}{2+3},\frac{3(4)+(-1)(2)}{2+3}\right]=(\frac{4-24}{5},\frac{12-2}{5})=(-4,2)$$

$$P(x,y)=\left[\frac{2(2)-3(-8)}{2-3},\frac{2(-1)-3(4)}{2-3}\right]=(28,14)$$

27- نقاط تقاطع خط مستقیم $x-y+1=0$ با دایرهٔ $x^2+y^2=5$ را دریابید.

حل:

$$y=x+1$$
$$x^2+(x+1)^2=5$$
$$x^2+x^2+2x+1-5\Rightarrow x^2+x-2=0$$
$$(x-1)(x+2)=0$$
$$x=1 \qquad x=-2$$

پس نقاط تقاطع عبارت اند از: $(-2,-1)$ و $(1,2)$

28- اگر خط مستقیم $x+ay-5=0$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y=0$ مماس باشد قیمت a را دریابید.

حل: قیمت x را از معادلهٔ خط مستقیم به دست آورده و در معادلهٔ دایره به عوض آن وضع می کنیم که:

$$x=-ay+5$$
$$(-ay+5)^2+y^2-2(-ay+5)+4y=0$$
$$a^2y^2-10ay+25+2ay-10+4y+y^2=0$$
$$(a^2+1)^2+(-8a+4)y+15=0$$
$$\Delta=(8a+4)^2-4(a^2+1)\cdot 15=64a^2-64a+16-60a^2-60=0$$
$$4a^2-64a-44=0$$
$$a^2-16a-11=0$$
$$\Delta'=64+11=75$$ ویا
$$a_{1,2}=8\pm\sqrt{75}$$

29- معادلهٔ دایرهٔ را که از نقاط $(0,0)$و $(2,0)$ میگذرد و با خط مستقیم $y-1=0$ مماس باشد عبارت است از:

a) $x^2+y^2-4x=0$

b) $x^2+y^2-2x=0$

c) $x^2+y^2+2x=0$

حل: چون نقاط $(0,0)$و $(2,0)$ بر محیط دایره واقع اند؛ پس:

(شعاع دایره) $|AC|=|BC|$

$$|AC|^2=|BC|^2$$
$$(h-0)^2+(5-0)^2=(h-2)^2+(k-0)^2$$
$$\Rightarrow h^2+k^2=h^2-4h+4+k^2\Rightarrow 4h=4\Rightarrow h=1$$

پس مرکز دایره C(1,k) می باشد.

چون y-1=0 است

$$\frac{|0(1)+(k)(-1)|}{\sqrt{0^2+1^2}}=r\Rightarrow r^2=|k-1|^2$$
$$|AC|^2=(k-1)^2$$
$$h^2+k^2=k^2-2k+1$$
$$1=-2k+1\Rightarrow k=0$$
$$r^2=|0-1|^2=1$$
$$(x-1)^2+(y-0)^2=1$$
$$x^2+y^2-2x=0$$

جزء b صحت دارد.

30 – دایرهٔ که معادلهٔ آن $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ باشد.

a) حقیقی است   b) نقطوی است   c) موهومی است

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{4^2}{4}-14}=\sqrt{\frac{36}{4}+\frac{16}{4}-14}=\sqrt{9+4-14}=\sqrt{-1}$$

جزء c صحت دارد دایره موهومی است.

31- دایرهٔ که معادلهٔ آن $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ باشد.

c) موهومی است   b) نقطوی است   c) حقیقی است

حل:

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-5}=\sqrt{1+4-5}=0$$

جزء b صحت دارد دایره نقطوی است.

32- فاصله بین نقاط $A(4,-3)$ و $B(-2,-5)$ و نیز کمیات وضعیه نقطهٔ تنصیف خط مستقیم $\overline{AB}$ را دریابید.

حل:

(واحد طول) $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-2-4)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+(-2)}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

کمیات وضعیهٔ نقطهٔ تنصیف: $(x,y)=(1,-4)$ می باشد.

33- اگر رأس های یک مثلث $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ و $C(-1,5)$ باشد نشان دهید که این مثلث قایم الزاویه می باشد.

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+6)^2 + (-5-3)} = \sqrt{145}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(-1+6)^2 (5-3)^2} = \sqrt{29}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (5+5)^2} = \sqrt{116}$$

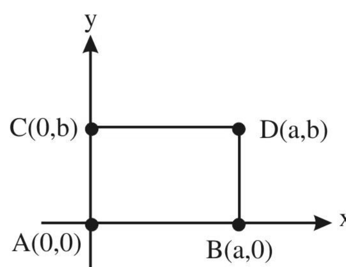
چون:

$$(\sqrt{145})^2 = (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{116})^2$$

(قضیهٔ فیثا غورث) $\quad 145 = 29 + 16$

پس مثلث قایم الزاویه می باشد: $\quad 145 = 145$

34- نشان دهید که نقاط $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ ، $D = (a,b)$ رأس های یک مستطیل اند. و نیز نشان دهید که قطر های مستطیل با هم مساوی می باشند.



$$|AB| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2} = a$$
$$|CD| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-b)^2} = \sqrt{a^2} = a$$
$$|AC| = \sqrt{(0-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2} = b$$
$$|BD| = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2} = b$$

واضح است که: $|BD| = |AC|$ و $|AB| = |CD|$ بوده نقاط C,B,A و D رأس های یک مستطیل می باشد و نیز:

$$|AD| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|BC| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

در نتیجه $|AD| = |BC|$ یا طول قطر های مستطیل باهم مساوی می باشند.

35 – نشان دهید که نقاط $A(3,1)$, $B(6,2)$ و $C(9,3)$ روی یک خط مستقیم واقع اند.

حل: برای اینکه هر سه نقطه بالای یک خط مستقیم واقع باشند باید میل خط مستقیم $\overline{AB}$ با میل خط مستقیم $\overline{BC}$ مساوی باشد.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-3} = \frac{1}{3}$$
$$m_{\overline{BC}} = \frac{3-2}{9-6} = \frac{1}{3}$$

پس این نقاط بالای خط مستقیم قرار دارد.

و نیز توسط مساوات $|AC| = |AB| + |BC| \Rightarrow$ نشان داده می شود

$$|AC| = \sqrt{(9-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$|BC| = \sqrt{(9-6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$
$$|AB| + |BC| = \sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow |AC| = |AB| + |BC|$$

در نتیجه نقاط C,B,A روی یک خط مستقیم واقع اند.

36- معادلات خطوط مستقیم را دریابید که از هر جوره نقاط داده شدۀ زیر میگذرد.

$a:\quad (5,8),(1,2)$

$b:\quad (-1,-3)\ ,\ (2,-1)$

$c\quad (0,3)\ ,\ (5,0)$

$d:\quad (3,5),(8,15)$

$e:\quad (-2,-1)\ ,\ (3,-4)$

$f:\quad (0,2)\ ,\ (-2,0)$

حل جزء (a:

$$y-8=\frac{2-8}{1-5}(x-5)\Rightarrow y-8=\frac{-6}{-4}(x-5)\Rightarrow 2y-3x-1=0$$

حل جزء(b

$$y+3=\frac{-1+3}{2+1}(x+1)\Rightarrow y+3=\frac{2}{3}(x+1)\Rightarrow 3y-2x+7=0$$

حل جزء(c :

$$y-3=\frac{0-3}{5-0}(x-0)\Rightarrow y-3=\frac{-3}{5}x$$

$$5y-15+3x=0\Rightarrow 5y+3x-15=0$$

حل جزء(d:

$$y-5=\frac{15-5}{8-3}(x-3)\Rightarrow y-5=\frac{10}{5}(x-3)$$

$$y-5=2x-6\Rightarrow y-2x+1=0$$

حل جزء(e:

$$y+1=\frac{-4+1}{3+2}(x+2)\Rightarrow 3x+5y+11=0$$

حل جزء(f:

$$y-2=\frac{0-2}{-2-0}(x-0)\Rightarrow x-y+2=0$$

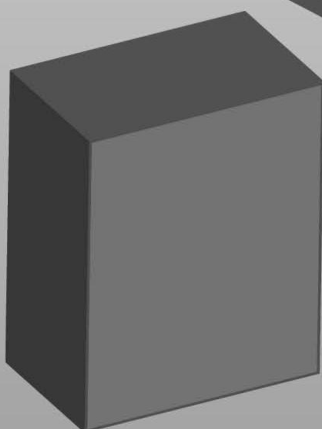
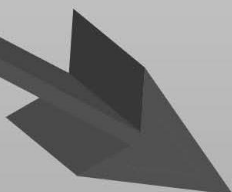
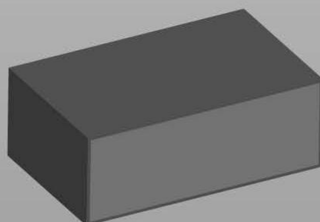
37 – معادلۀ خط مستقیم که از نقاط $(5,8)$و $(-1,10)$ می گذرد عبارت است از:

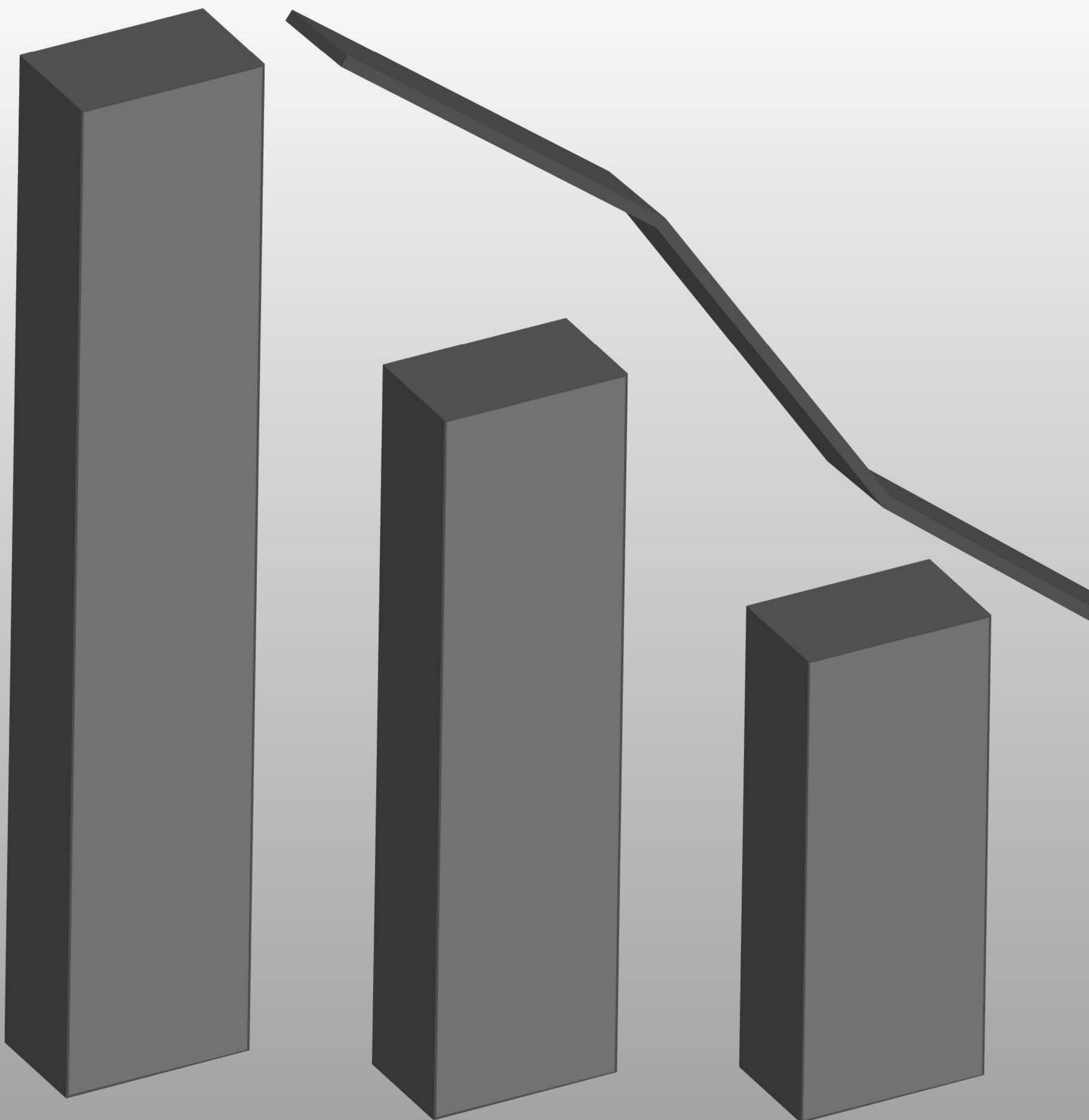
$a:\ y=-\frac{1}{3}x+9\frac{2}{3}$ $\quad b:\ y=-\frac{x}{3}+9\frac{2}{3}$ $\quad c:\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}$

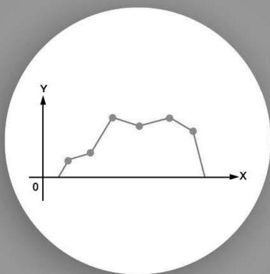
$d:$ هر سه درست اند:

مشاهده می شود که هر سه معادله خط مستقیم باهم مساوی می باشند؛ پس جزءd صحت دارد.

فصل هشتم
احصائیه





گراف چند ضلعی کثرت (فریکونسی)

صفحهٔ کتاب (359)   وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخیر این درس: • طریق رسم کردن گراف چند ضلعی فریکونسی را بیاموزند. • از روی(data) داده شده گراف چند ضلعی فریکونسی را رسم کرده بتوانند. • بفهمند که مساحت مستطیل های گراف مستطیلی با سطح زیر گراف چند ضلعی فریکونسی مساوی می باشد. • درک کنند که این گونه گراف ها برای متغیر های کمی پیوسته مناسب می باشند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی، مباحثه و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض خلق انگیزه سؤال قسمت ورودی را از شاگردان بپرسید.که مساحت کُل مستطیل ها با مساحت زیر گراف چند ضلعی مساوی است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت صفحه(395) این درس را شاگردان در گروپ ها بعد از حل مثال صفحه 360 از روی جدول (data) داده شده کارکنند که حل این فعالیت در کتاب درسی توضیح گردیده است و گراف آن در معلومات اضافی این درس رسم شده است.

بعد از حل مثال صفحه 360 این درس با سهم گیری شاگردان گراف فعالیت را ترسیم نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس برای دیتای صفحه 362 که اندازهٔ قد 24 شاگرد داده شده است جدول فریکونسی را ترتیب کنید که گراف آن در قسمت حل تمرین موجود است.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

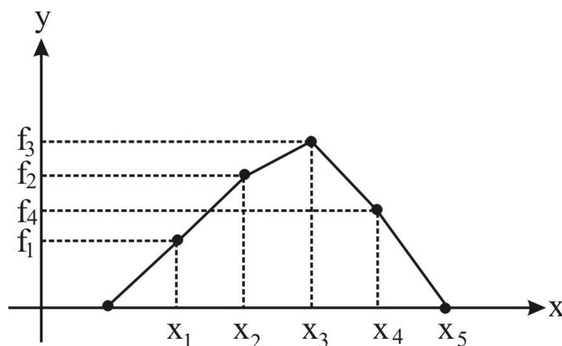
از شاگردان بپرسید که یک گراف چی وقت محور x را قطع کرده می تواند.

معلومات اضافی برای معلم

• در این گراف نقاط (x_i, f_i) را در مستوی کمیات وضعیه با هم وصل می نماییم که (x_i)مرکز صنف و (f_i) فریکونسی مربوطه صنف می باشد. یک خط منکسر به دست می آید که ابتدأ این خط نقطه (x_1, f_1) و انجام آن (x_k, f_k) می باشد نا گفته نماند از این گراف استفاده های دیگر نیز می شود برای این که مساحت زیر گراف چند ضلعی مساوی به مساحت گراف مستطیلی باشد دو انجام گراف چند ضلعی را به

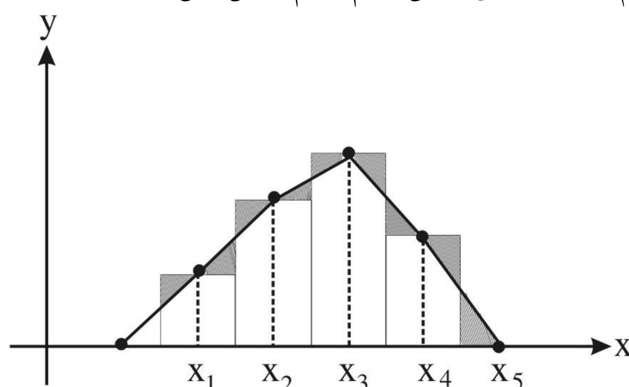
محور x وصل می کنیم. فرض می شود که قبل از صنف اول نیز یک صنف داشته باشیم که فریکونسی آن صفر باشد و همچنین فرض می کنیم که بعد از صنف k ام یک صنف دیگری داشته باشیم که فریکونسی این صنف نیز صفر باشد. با فرض کردن این دو صنف (دسته) گراف رسم خواهد شد که آن خصوصیت را داشته باشد. (محور x را قطع می کند).

(مساحت زیر گراف چند ضلعی مساوی با مساحت گراف مستطیلی می باشد)طور مثال شکل ذیل را مشاهده کنید.



که نقاط x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 مرکز های صنف ها و f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 فریکونسی مربوطه صنف ها می باشد.

اگر گراف مستطیلی(هستوگرام) را بالای این شکل رسم کنیم شکل ذیل را به خود میگیرد:



اگر به شکل توجه شود(مساحت خط شده مستطیل مساوی است به مساحت خط شده اضافه از گراف چند ضلعی) بنابر این مساحت تمام مستطیل ها با مساحت گراف زیر گراف چند ضلعی فریکونسی مساوی می باشد گراف چند ضلعی فریکونسی برای متغیر های کمی پیوسته مناسب میباشد .

- برای مثال گراف چند ضلعی فریکونسی(data) ذیل را رسم کنید.

مرکز صنف اول $= \frac{2.05 + 2.65}{2} = 2.35$

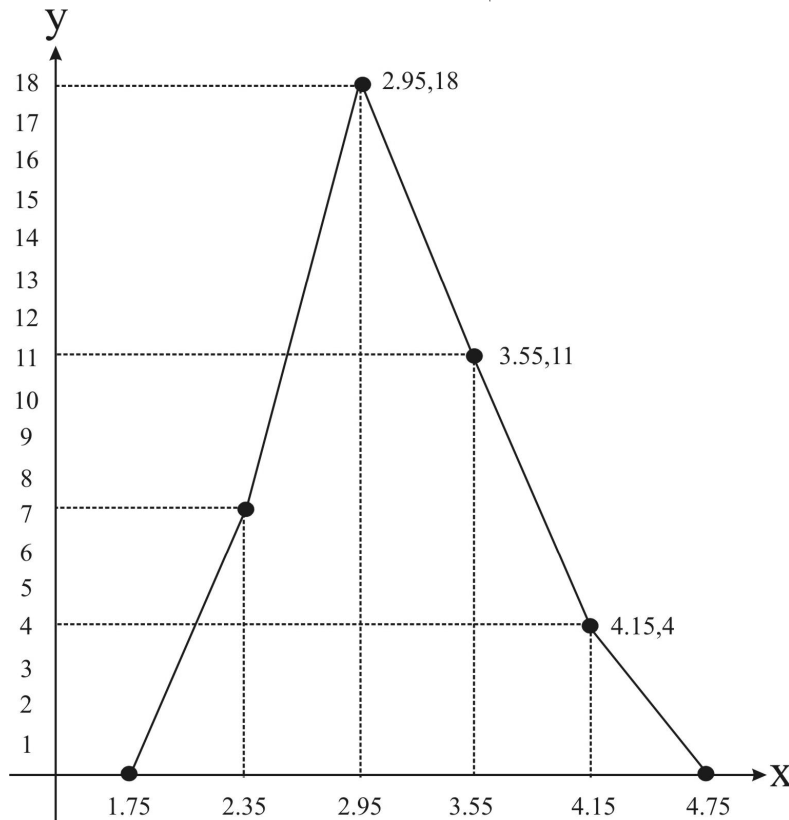
صنف ها	مرکز صنف	وسعت صنف	فریکونسی مطلق
$2.05 - 2.65$	2.35	0.6	7
$2.65 - 3.25$	2.95	0.6	18
$3.25 - 3.85$	3.55	0.6	11
$3.85 - 4.45$	4.15	0.6	4
مجموع			40

بدین منظور که گراف چند ضلعی کثرت(فریکونسی) محور x را قطع کند

چون وسعت دسته یا طول صنف (0.6) می باشد؛ پس:

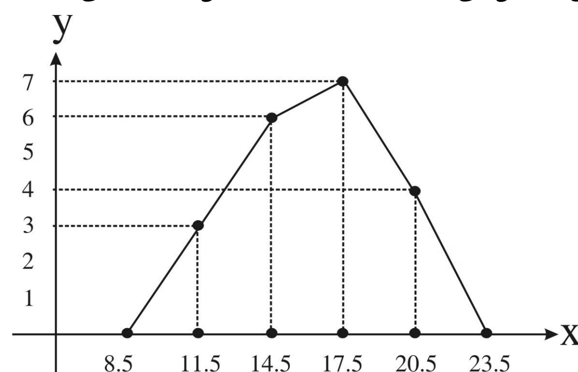
$(c = 2.65 - 2.05 = 0.6)$ $\qquad 2.35 - 0.6 = 1.75 \qquad 4.15 + 0.6 = 4.75$

پس نقاط $(1.75,0)$ و $(4.75,0)$ را علاوه می نماییم تا گراف چند ضلعی فریکونسی محور x را قطع کند.



- حل فعالیت صفحه (359)

نقاط $(11.5,3)$, $(14.5,6)$, $(17.5,7)$ و $(20.5,5)$ را در مستوی کمیات وضعیه تعین می کنیم که قیمت های x این نقاط مرکز صنف (دسته) و قیمت y عبارت از فریکونسی مربوط صنف می باشد برای این که سطح زیر گراف چند ضلعی فریکونسی مساوی به مساحت گراف مستطیلی شود. (که این موضوع بعد مطالعه می شود) دو صنف را اضافه فرض می نماییم یک صنف قبل از صنف اول ویک صنف بعد از صنف آخر، واضح است که فریکونسی این دو صنف صفر می باشد $14.5 - 11.5 = 3$ که طول یا وسعت صنف یا (Class interval) می باشد پس $11.5 - 3 = 8.5$ مرکز صنف فرضی قبل از صنف اول و $20.5 + 3 = 23.5$ مرکز صنف فرضی بعد از صنف آخری می باشد اگر این دو نقطه را با نقاط فوق اضافه نماییم گراف چند ضلعی فریکونسی حاصل می شود. طوری که در شکل مشاهده می شود.



جواب به سؤال تمرین

اندازۀ قد 24 نفر شاگرد صنف نهم و دهم (برحسب سانتی متر)قرار زیر یاد داشت گردیده است.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
125	98	117	153	141	126

برای دیتای (Data) فوق یک جدول کثرت تنظیم نموده، دیتا(Data) را در شش دسته، دسته بندی کنید. بـرای نمـایش ایـن دیتا (Data) چه نوع گراف مناسب است؟ گراف چند ضلعی کثرت را رسم کنید.

حل: در قدم اول دیتا داده شده را منظم می نماییم:

98 107 115 117 118 121 122 123 123 126 126 128 128 129 133
135 136 138 141 142 144 148 152 153

دسته ها (صنف ها)	فریکونسی fi	وسط (مرکز دسته ها) xi
$98-108$	2	103
$108-118$	2	113
$118-128$	7	123
$128-138$	6	133
$138-148$	4	143
$148-158$	3	153

اگر وسط دسته ها (x_i) را بالای محور x و فریکونسی (f_i) را بالای محور y نشان دهیم که (x_i, f_i) جورۀ مرتب تشکیل می شود، و با تعین این نقاط در مستوی گراف چند ضلعی فریکونسی (کثرت) برای نمایش دیتای فوق ترتیب میگردد.

$(x_i - c, 0) = (103 - 10, 0) = (93, 0)$

$(x_n + c, 0) = (163, 0)$





گراف ساقه و برگ

صفحۀ کتاب (363)　　وقت تدریس(1ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق ترسیم گراف ساقه و برگ را بیاموزند. • بفهمند که در دیتا داده شده کدام ارقام به حیث ساقه و کدام ارقام به حیث برگ ها نوشته می شود. • بفهمند که اگر گراف ساقه و برگ در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت به اندازه 90° دوران کند به گراف میله یی تبدیل می شود. • از روی data داده شده گراف ساقه و برگ را رسم کرده بتوانند. • از آموزش موضوع به ریاضی علاقه مند شوند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کار گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت ها، اشکال، گراف هاو ...
توضیح ورودی **(5) دقیقه**	بعد از فعالیت های مقدماتی، غرض خلق انگیزه برای آموزش سؤال ورودی را از شاگردان بپرسید. می توانیم جامعه احصائیوی را به حیث ساقه قبول نماییم؛ طور مثال هر نفر شماره تذکره تابعیت یا شماره کارت دارد.

5- فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

استاد محترم فعالیت 363 را به شاگردان توضیح کند که جواب آن در معلومات اضافی موجود می باشد و نیز نشان داده شود که اگر گراف تشکیل شده برگ و ساقه را به اندازه 90° خلاف حرکت عقربه ساعت دوران دهیم واضح است به گراف میله تبدیل می شود.

مثال صفحۀ (364) را با سهم گیری شاگردان حل کنید و گراف آن را یا توسط چارت و یا به روی تخته رسم نمایید؛ همچنین مثال صفحه(365) را نیز به عین طریق به شاگردان توضیح نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس، این سؤال را حل کنید.

گراف ساقه و برگ (*data*) داده شدۀ زیر را ترسیم نمایید.

19　06　10　22　08　18　23　05　16　09　18

17　14　12　24　25　16　23　24　22　16　18　17

نوت: چون تمام اعداد دورقمی بوده به این منظور عدد 6 به شکل 06 و عدد 5 به شکل 05 و عدد 9 به شکل 09 نوشته شده است.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

برای داتا داده شده ذیل گراف ساقه و برگ را رسم کنید.

38 , 48 , 45 , 32 , 29 , 32 , 45 , 36 , 22 , 21 , 35 , 45 , 47 , 26 , 43 , 48 , 64

که جواب آن چنین می باشد.

نخست اعداد را به شکل صعودی ترتیب نمایید.

21 , 22 , 26 , 29 , 32 , 32 , 35 , 36 , 38 , 43 , 45 , 45 , 45 , 47 , 48 , 48 , 64

که گراف ساقه و برگ آن طور زیر می باشد:

ساقه	برگ
2	1 2 6 9
3	2 2 5 6 8
4	3 5 5 5 7 8 8
5	
6	4

معلومات اضافی برای معلم

1- این نوع گراف برای اطلاعاتی مناسب است که نخست اعداد طبیعی باشد، ثانیاً اگر رقم یک ها را در آن ها نادیده بگیریم، آنچه که باقی می ماند تفاوت زیادی نداشته باشد. یک ها به عنوان برگ و بعد از حذف کردن مرتبه یک ها به عنوان ساقه، یک گراف ساقه و برگ را تشکیل می کنند، غرض توضیح بیشتر سؤالی که برای تحکیم درس این درس داده شده است، اگر یک های آن ها حذف شود اعداد 0 ،1 و (2) باقی می ماند که بین خود تفاوت زیادی ندارند.

حال، تمام اعدادی را که رقم دهاً آن ها صفر است در نظر میگیریم و یک های آن ها را به ترتیب با کمی فاصله از ساقه رو به روی صفر می نویسیم برگ صفر به صورت مقابل تشکیل می شود: 5689 0

وبدین معنی که چهار دیتا بین اعداد یک رقمی داریم که عبارت اند از 8,6,5و 9 و همچنین برگ عدد 1 عبارت است از: 026666778889 1 و برگ عدد 2 عبارت است از: 2233445

گراف ساقه و برگ آن طور ذیل می باشد:

0 5689

1 024666778889

2 2233445

که 1,0و 2 ساقه می باشد، اگر این گراف به اندازه 90° خلاف حرکت عقربه ساعت دوران داده شود نمایش دهنده گراف میله یی می باشد طور ذیل:

	9	
	8	
	8	
	8	
	7	
	7	5
	6	4
	6	4
9	6	3
8	4	3
6	2	2
5	0	2
0	1	2

یکی از مزایایی گراف ساقه و برگ این است که: در وقت ضرورت به data (دیتا) نیز دسترسی داریم.

نوت: برای رسم کردن این گراف از فریکونسی مطلق استفاده کردیم، می توانیم که این گراف را با استفاده از فریکونسی نسبی نیز رسم نماییم، واضح است که در این صورت ارتفاع گراف کم می شود؛ اما نسبت ها حفظ خواهد شود.

2- گراف ساقه (Stem) وبرگ (Leaf) داتا داده شده طور زیر می باشد.

32 , 32 , 34 , 91 , 38 , 12 , 17 , 62 , 22 , 51, 27, 34 , 43 , 44 , 44 , 8 , 30 , 30 , 31 , 40 , 34 , 37 38 , 38 ,78 , 50 , 26 , 54 , 28 , 29 , 19 , 6 , 54

ساقه	برگ
0	6,8
1	2,7,9
2	2,6,7,8,9
3	0,0,1,2,2,4,4,4,7,8,8,8
4	0,3,4,4,5
5	0,1,4
6	2
7	8
8	
9	1

3- گراف ساقه و برگ برای data داده شدهٔ زیررا رسم نمایید.

53, 49, 27, 48, 60, 52, 44, 38, 47, 52, 82, 46, 55, 31, 39, 54, 51, 47, 50, 45, 50, 61, 43, 64

ساقه	برگ
2	7
3	1,8,9
4	3,4,5,6,7,7,8,9
5	0,0,1,2,2,3,4,5
6	0,1,4
7	
8	2

4- تعداد بازی های برده شده و باخته شده یک تیم کرکت در سال های مختلف طور زیر داده شده است:

سالها	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
تعداد بازیهای برده شده	55	20	37	52	30	49	27	35	31	34	33
تعداد بازیهای باخته شده	10	19	24	17	13	26	17	21	24	19	16

گراف ساقه و برگ دو طرفه این دیتا را ترسیم کنید.

تعداد بازیهای باخته شده	ساقه	تعداد بازیهای برده شده
9 9 7 7 6 3 0	1	
6 4 4 1	2	0 3 7
	3	0 1 4 5 7
	4	9
	5	2 5

5- در یک کشور ارتفاع بلندترین درخت های مختلف قرار زیر داده شده، گراف ساقه و برگ این دیتا را رسم کنید.

نوع درخت	ارتفاع	نوع درخت	ارتفاع	نوع درخت	ارتفاع
A	47	G	38	M	55
B	40	H	77	N	84
C	40	I	74	O	63
D	67	J	58	P	40
E	42	K	61	Q	48
F	91	L	44	R	35

حل:

3	5 8
4	0 0 0 2 4 7 8
5	5 8
6	1 3 7
7	4 7
8	4
9	1

6- نمبر اتومی (Atomic Number) بعضی از عناصر قرار زیر داده شده است، گراف ساقه و برگ آن را ترتیب کنید.

عنصر	نمبر اتومی	عنصر	نمبر اتومی	عنصر	نمبر اتومی	عنصر	نمبر اتومی
Hydrogen	1	Silver	47	Carbon	6	Titanium	22
Nitrogen	7	Barium	56	Argon	18	Bromine	35
Calcium	20	Iron	26	Krypton	36	Iodine	53

حل:

0	1 6 7
1	8
2	0 2 6
3	5 6
4	7
5	3 6

7- دیتای گراف برگ و ساقهٔ زیر را بنویسید:

ساقه	برگ
5	0 1 4 8
6	2 6 7
7	1 4 5 6 6
8	2

که data آن عبارت است از: 50 , 51 , 54 , 58 , 62 , 66 , 67 , 71 , 74 , 75 , 76 , 76 , 82

جواب به سؤال های تمرین

1- برای اطلاعات زیر گراف ساقه و برگ را رسم کنید:

7.9 8.3 10.9 11.7 8.4 9.1 6.8

12.5 11.2 7.8 12 11.3 8.4 13 6.8

حل: دیتا را از اعداد کوچک به بزرگ مرتب می نمایم:

6.8 6.8 7.8 7.9 8.3 8.4 8.4 9.1 10.9

11.2 11.3 11.7 12 12.5 13

برای رفع قسمت اعشاری اعداد را ضرب 10 می کنیم.

68 68 78 79 83 84 84 91 109 112 113 117 120 125 130

ساقه	برگ
6	8,8
7	8,9
8	3,4,4
9	1
10	9
11	2,3,7
12	0,5
13	0

یا این طور که عدد 3.8 را به شکل 038 و عدد 11.2 را به شکل 112 و عدد 12 را به شکل 120 طور زیر می نویسیم:

ساقه	برگ
06	8 8
07	8 9
08	3 4 4
09	1
10	9
11	2 3 7
12	0 5
13	0



چارک ها

صفحۀ کتاب (367) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • تعریف چارک اول، دوم و سوم را بیاموزند. • بیاموزندکه چارک اول، دوم و سوم بالترتیب به Q_1, Q_2 و Q_3 نشان داده می شود. • موقعیت و مقدار چارک ها را تعیین کرده بتوانند. • در حل مسایل احصائیوی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی غرض خلق انگیزه سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را به شاگردان توضیح کنید.

بعد از ان که چارک ها و دریافت موقعیت چارک ها به شاگردان توضیح شد، مثال این درس را باسهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس (7) دقیقه

سؤال تمرین این درس حل گردد.

ارزیابی درس:(5) دقیقه

از شاگردان بپرسید که مقدار های Q_1, Q_2 و Q_3 را تعریف کنند.

معلومات اضافی برای معلم

• Q_1, Q_2 و Q_3 را این طور نیز تعین می کنند طور مثال:

Q_1, Q_2 و Q_3 داتای داده شدۀ زیر عبارت اند از:

26 17 21 23 19 28 17 20 29

در قدم اول دیتای داده شده را به طور صعودی ترتیب می نماییم داریم که:

17 17 19 20 21 23 26 28 29

$Q_1 = \frac{17+19}{2} = 18$ $Q_2 = 21$ $Q_3 = \frac{26+28}{2} = 27$

• Range ، چارک اول و سوم data زیر کدام اعداد اند؟

65 42 45 20 66 60 76

$\text{Range} = 56 \qquad Q_1 = 42 \qquad Q_3 = 66$

•

84 95 76 88 92 78 98

$\text{Range} = 22 \qquad Q_1 = 78 \qquad Q_3 = 95$

•

13 11 14 16 14 15 16 17 14 18 19 16 25

$\text{Range} = 14 \qquad Q_1 = 14 \qquad Q_3 = 17.5$

•

2 3 3 3 3 3 (3) 4 4 4 4 4 4 (4) 4 5 5 5 5 5 (5) 5 5 5 5 5 6

میانه $= 4$

$Q_1 = 3 \qquad Q_3 = 5$

جواب به سؤال های تمرین

فرض کنید دیتا قرار زیر داده شده باشد:

100 90 80 120 160 140 85

a) چارک اول و سوم را به دست آرید.

b) اعداد قبل از میانه را بنویسید.

c) اعداد بعد از میانه را به دست آورید.

حل: دیتای داده شده را به صورت صعودی مرتب می نماییم و بعداً شماره گذاری می کنیم:

80 85 90 100 120 140 160

1 2 3 4 5 6 7

a) چارک اول $Q_1 = \frac{1\cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7+2}{4} = \frac{9}{4} = 2.5 \Rightarrow Q_1 = 85.5$

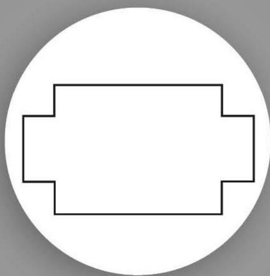
$$Q_3 = \frac{3\cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{21}{4} + \frac{1}{2} = \frac{23}{4} = 5.75 \Rightarrow Q_3 = 120.75$$

b) چون میانه مساوی به Q_2 می باشد نخست آن را به دست آورده؛ سپس اعداد قبل از آن وبعد از آن را به دست می آوریم:

$$Q_2 = \frac{2\cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{14+2}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow Q_2 = 100$$

اعداد قبل از میانه عبارتند از: 90 85 80 می باشد.

c: اعداد بعد از میانه عبارتند از: 160 140 120 می باشد.



گراف صندوقچه یی(گراف جعبه یی)

صفحۀ کتاب (369)　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان باید در اخر این درس: • طریق رسم کردن گراف صندوقچه یی یا گراف جعبه یی (data) داده شده را بیاموزند. • بدانند که این گراف نظر به گراف های دیگر پراکنده گی (data) را خوبتر نشان میدهد. • بدانند که این گراف(data) را به اساس،کوچکترین(data)، چارک اول، میانه، چارک سوم و بزرگترین (data) نشان میدهد. • توسط این گراف تشخیص کرده بتوانند که دیتا متناظر است یا نه؟ • گراف صندوقچه یی (data) داده شده را رسم کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی غرض خلق انگیزه سؤال قسمت ورودی از شاگردان پرسیده شود که شکل یک صندوق سرباز را دارد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را استاد محترم با سهم گیری شاگردان کار کند که حل آن قرار زیر است:

نخست($data$) را مرتب می سازیم:

10 , 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 ,(19), 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 31 , 31

که میانه اعداد فوق عدد 19 می باشد، اعدادیکه در نیمه قبل از میانه قرار دارند عبارت اند از:

10 , 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

و میانه این اعداد $14.5 = \frac{14+15}{2}$ می باشد.

و اعدادیکه در نیمه بعد از میانه قرار دارند عبارت اند از:

23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 31 , 31

میانه یی این اعداد $26.5 = \frac{26+27}{2}$ می باشد.

وچارک دوم با میانه یا عدد (19) مطابقت می کند. بعد از این که گراف صندوقچه یی و مراحل ترسیم این گراف به شاگردان توضیح گردد. مثال این درس را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال ذیل حل شود.

اگر *data* ذیل داده شده باشد:

1,1.5 , 1.5 , 1.75 , 3 , 7 , 12 , 15 , 20

میانه این *data* عبارت از عدد (3) می باشد *data*,50% پائین میانه یعنی اعداد. 1.75 , 1.5 , 1.5 , 1 در فاصله [1,1.75] یا در فاصله 0.75 متمرکزشده است و حال آن که 50% (data) 20 , 15 , 12 , 7 در فاصله [7,20] به طول 13 پراکنده شده اند.

پس در نتیجه این جامعه احصائیوی متناظر نیست یعنی تراکم *data* در سمت چپ نسبت به سمت راست بیشتر می باشد.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

اگر *data* ذیل داده شده باشد:

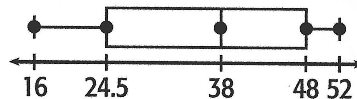
21 , 51 , 36 , 38 , 45 , 52 , 28 , 16 , 41

گراف صندوقچه یی آن را رسم کنید.

نخست اعداد را به طور صعودی می نویسیم:

16 , 21 , 28 , 36 , 38 , 41 , 45 , 51 , 52

چون میانه $\tilde{x} = 38$ می باشد میانه، 4 عدد راست 48و میانه 4 اعداد چپ عبارت از (24.5) که گراف آن قرار زیر می باشد.



معلومات اضافی برای معلم

گراف صندوقچه یی برای مقایسه ارقام و اعداد (*data*) بسیار مفید است که توسط آن تعین کرده می توانیم که جامعه احصائیوی متناظر است یاخیر؟ اما اینگونه سؤالات را جواب نمی دهد مانند:

- آیا اعداد باهم نزدیک اند؟

آیا اعدادی زیادی در اطراف اوسط حسابی متمرکز اند و یا به اطراف کم ترین (data) یا بیش ترین (data) متمرکز می باشند؟

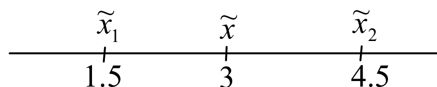
- گراف جعبه یی یا گراف صندوقچه یی (data) که در ذیل داده شده عبارت است از:

1 , 1.25 , 1.75 , 2 , 3 , 4 , 4.25 , 4.75 , 5

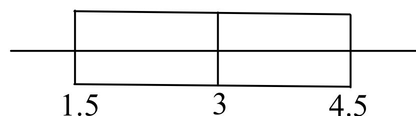
غرض ترسیم گراف، نخست میانه آن عبارت از $\tilde{x} = 3$ (x تیلدا) میانه اعداد کوچکتراز میانه (1 , 1.25 , 1.75 , 2) عبارت از $\tilde{x}_1 = \frac{1.25+1.75}{2} = 1.5$ میانه اعداد بزرگتر از میانه (4 , 4.25 , 4.75 , 5) عبارت است از:

$\tilde{x}_2 \frac{4.25+4.75}{2} = 4.5$

روی خط اعداد سه نقطه $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ و میانه($\tilde{x}$) را مشخص می نماییم.



مستطیلی را رسم می نماییم که عرض آن دلخواه وطول آن از $\tilde{x}_1$ الی $\tilde{x}_2$ می باشد و در نقطه $\tilde{x}$ توسط خط عمودی این مستطیل را به دو قسمت تقسیم می کنیم



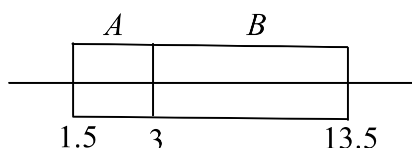
چون 50% اعداد در جعبهٔ به ضلع 1.5 الی 3 قرار دارند و 50% دیگر در جعبهٔ از 3 الی 4.5 قرار دارند این دو قسمت جعبه با هم مساوی است.

در نتیجه تراکم اعداد در دو طرف میانه مساوی است، بنابرآن این جامعه احصائیوی متناظر است.

- همچنین *data* زیر متناظر نیست.

1 , 1.5 , 1.5 , 1.75 , 3 , 7 , 12 , 15 , 20

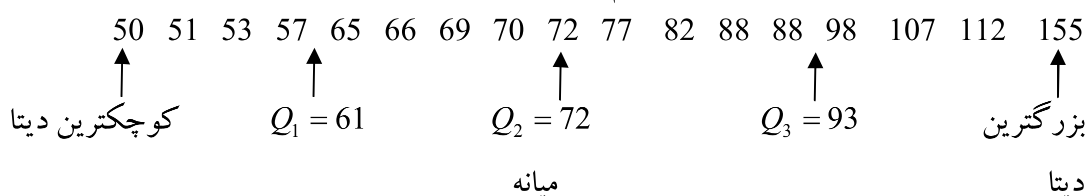
گراف آن قرار ذیل می باشد:



از شکل واضح مشاهده می شود که 50% اعداد پایین میانه در فضای کوچک *A* و 50% بالای میانه در فضای وسیع *B* قرار دارند؛ بنابراین تراکم در سمت چپ بیشتر از تراکم در سمت راست میانه می باشد؛ پس این *data* متناظر نمی باشد.

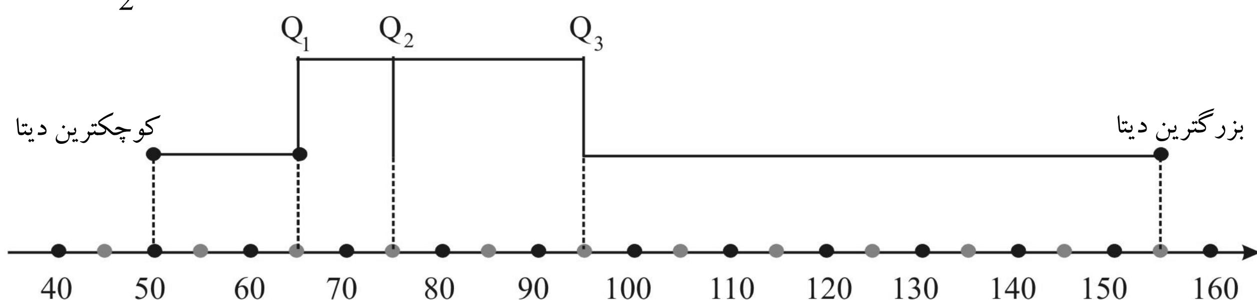
- گراف صندوقچه یی (Box and Whisker Plots): این گراف توزیع data را نشان می دهد.

مثال: گراف صندوقچه یی *data* زیر را رسم کنید .



$$Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$$

$$Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$$



- پنج کمیت (بزرگترین دیتا، Q_1,Q_2,Q_3 و کوچکترین دیتا) این بکس را تشکیل می دهد.

برای ترتیب این بکس پنج مرحلهٔ زیر را درنظر بگیرید.

1- دیتا را به طور صعودی (Increasing) ترتیب دهید. و Q_1,Q_2,Q_3 را دریابید.

2- یک خط اعداد (Line numbers) را رسم کنید که بزرگترین و کوچکترین دیتا را دربر داشته باشد.

3- یک بکس را بسازید که در انجام طرف چپ آن Q_1 و در انجام طرف راست آن Q_3 باشد.

4- یک خط عمودی (Vertical line) را در Q_2 (میانه) رسم کنید.

5- یک خط را از Q_1 الی کوچکترین دیتا و یک خط را از Q_3 الی بزرگترین دیتا به طرف راست و چپ بکس رسم کنید.

مثال:

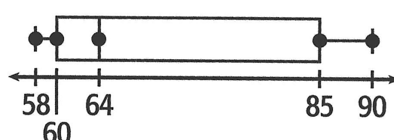
a: گراف صندوقچه یی $data$ داده شده زیر را رسم کنید.

60 , 58 , 75 , 64 , 90 , 85 , 60

در data فوق

کوچکترین دیتا $= 58$ $\quad Q_1 = 60 \quad Q_2 = 64 \quad Q_3 = 85$

بزرگترین دیتا $= 90$ $\quad$ Range $= 32$



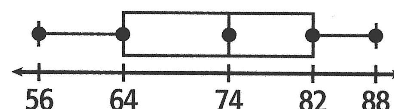
b-

56, 88 , 60 , 84 , 72 , 68, 80 , 76

در data فوق

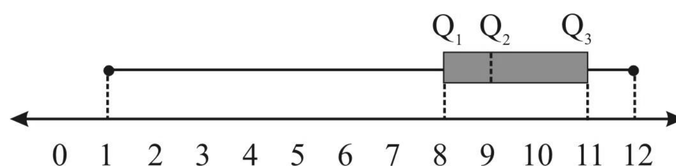
کوچکترین دیتا $= 56$ $\quad Q_1 = 64 \quad Q_2 = 74 \quad Q_3 = 82$

بزرگترین دیتا $= 88$ $\quad$ Range $= 32$



9- جواب به سؤال های تمرین

1- با توجه به گراف صندوقچه یی سؤالات زیر را جواب دهید. (متوجه باشید که در کتاب درسی در سم این شکل اشتباه صورت گرفته است.)



a) در گراف بالا میانه چند است؟

b) چارک اول در این دیتا عدد 8 است این عدد نشان دهندهٔ چیست؟

c) چارک سوم چند است؟ این عدد نشان دهندهٔ چیست؟

d) موجودیت میانه در سمت چپ صندوق نشان دهندهٔ چیست؟

e) طویل بودن تر ادف سمت چپ نسبت به ترادف سمت راست نشان دهندهٔ چیست؟

حل جز:

a) در گراف بالا میانه عدد 9 است.

b) عدد 8 که عبارت از چارک اول یعنی Q_1 می باشد نشان دهندهٔ آن است که 25% اطلاعات به طرف چپ واقع است.

c) چارک سوم (Q_3) عدد (11) می باشد و نشان دهنده این است که 75% دیتا به طرف چپ آن قرار دارد.

d) موجودیت میانه به طرف چپ نشان دهنده آن است که تعداد بیشتر اطلاعات به طرف چپ قرار دارند.

e) طویل بودن ترادف سمت چپ نیز نشان دهنده همین مدعا است که اطلاعات به طرف چپ زیاد می باشد.

2- سن بازی کنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

25 24 26 19 31 18 23 22 25 26
25 27 23 29 25 25 33 31 26

کدام نتیجه گیری زیر درست است؟

- تعداد بازیکنانی که سن آن ها بالاتر از اوسط است بیشتر می باشد.
- تعداد بازیکنانی که سن آن ها بالاتر از میانه است بیشتر می باشد.
- تعداد بازیکنانی که سن آن ها کمتر از اوسط است بیشتر می باشد.
- تعداد بازیکنانی که سن آن ها بیشتر از اوسط می باشد با تعداد بازی کنانی که سن آن ها کمتر از اوسط است برابر است.

حل: چون اطلاعات واقعی در اختیار ما قرار دارد ضرورت به تشکیل جدول فریکونسی دیده نمی شود.

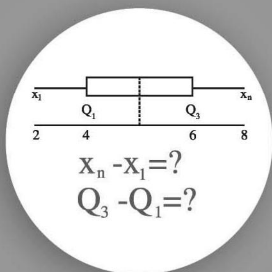
نخست دیتا را به ترتیب می نویسیم

18 19 22 23 23 24 25 25 25 (25) 25
26 26 26 27 29 31 31 33

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (18+19+22+23+24+25+25+25+25+25+26+26+26+27+$$

$$+29+31+31+33) = \frac{483}{19} = 25.42$$

- جمله اول درست نیست؛ زیرا تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از اوسط (25.42) می باشد 8 نفر است در حالی که تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از اوسط می باشد 11 نفر است.
- جمله دوم درست می باشد؛ زیرا تعداد بازی کنان که سن شان بیشتر از میانه (25) می باشد 8 نفر است و تعداد بازی کنان که سن شان کمتر از میانه (25) می باشد 6 نفر است.
- جمله سوم نیز درست است؛ زیرا که تعداد بازیکنانی که سن شان کمتر از اوسط می باشد 11 نفر است.
- جمله چهارم درست نمی باشد؛ زیرا که $(8 \neq 11)$



انحراف چارک ها یا انحراف چهارم ها
(Inter Quartile Range)

صفحهٔ کتاب (375)   وقت تدریس(1ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن انحراف چارک های (data) را بدانند. • بفهمند که همان طول مستطیل که در گراف صندوقچه یی دو میانه را باهم وصل می کرد عبارت از انحراف چارک ها می باشد. • فورمول یافتن انحراف چارک ها را بیاموزند. • توسط این فورمول، انحراف چارک های (data) را دریافت کرده بتوانند. • در مسایل احصائیوی از این فورمول استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیتهای مقدماتی، غرض خلق انگیزه برای آموزش فعال قسمت سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. و واضح گردد، وقتی که در یک جامعه احصائیوی($data$) باهم نزدیک و یا جامعه بزرگ باشد به علت موجودیت دو مقدار خیلی کوچک و خیلی بزرگ در جامعه دامنه تغییرات عددی بزرگی به دست می آید، یا تغیرنامناسب از جامعه را ارائه می کند، بدین ملحوظ یک چهارم حصه $data$ را از بالا و پایین حذف می کنند. که انحراف چارک ها یا انحراف- چهارم ها یکی از شاخص های نشان دهنده پراکنده گی معلومات می باشد. و از فورمول $Q = Q_3 - Q_1$ به دست می آید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را استاد محترم کار کند. متوجه باشید که در وقت نوشتن اعداد این فعالیت در کتاب درسی اشتباه صورت گرفته است اعداد آن طور زیر می باشد:

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

چارک های بالا و پایین:

بعضی اوقات امکان دارد که دامنهٔ تغییرات (ساحه تحول) از جامعه احصائیوی تعبیر های نامناسب را ارائه کند.

طور مثال: جامعه یی که اطلاعات آن باهم نزدیک اند یا به سبب وجود دو مقدار خیلی کوچک و خیلی بزرگ، دامنهٔ تغییرات (ساحه تحول) عدد بزرگ به دست می آید؛ طور مثال: تعداد شاگردانی که در مدت دوازده روز غرض مطالعه به کتابخانه رفته باشند طور زیر داده شده است.

0 , 1 , 2 , 8 , 7 , 6 , 5 , 9 , 10 , 6 , 15 , 11

واضح است که دامنه تغییرات R= 15-0=15 می باشد؛ اما (data) عموماً از 5 الی 11 پراکنده می باشد. که پراکنده گی آن ها زیاد نیست. از این سبب غرض از بین بردن تاثیر (data) های بزرگ و کوچک، تعدادی از اعداد بالا و پایین حذف می شود. این که کدام تعداد حذف شوند، مربوط به تعداد و نزدیک بودن (data)میباشد بعضی اوقات حصه دهم از بالا و پایین وبعضی اوقات حصه چهارم data بالایی و پایانی را حذف می کند (data) داده شده فوق در اول ترتیب شده و یک چهارم حصه را از بالا و پایین حذف شده داریم که:

0 , 1 , 2 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 15

بنابر آن دامنه تغییرات یا وسعت(Range) این data عبارت از 4=5-9 می باشد. که در اول دامنه تغییرات 15=0-15 بود. انحراف چارک ها (انحراف ربعی) را به شاگردان توضیح کنید و بعد مثال این درس را باسهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

کمترین و بزرگترین (data)، چارک ها، Range و انحراف ربعی یا انحراف چارک های (data) ذیل را دریابید و نیز گراف صندوقچه یی آن را رسم کنید.

5 6 9 2 3 7 2 9 8

که جواب آن چنین می باشد.

نخست دیتا را به ترتیب می نویسیم:

2 2 3 5 ⑥ 7 8 9 9

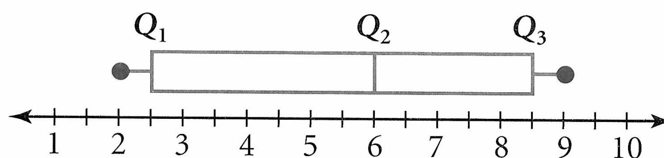
$$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$Q_2 = 6$$

$$Q_3 = \frac{8+9}{2} = 8.5$$

$$\text{Range} = 9 - 2 = 7$$

$$\text{IQR} = 8.5 - 2.5 = 6$$



ارزیابی درس: (5) دقیقه

قسمتی از سؤال اول تمرین این درس از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی

چون هدف احصائیه این است که معلومات و اطلاعات را خلص کند طوری که اطلاعات موجود از دست نرود.

برای این که فهمیده شود که قسمت وسط ارقام دارای فریکونسی بیشتری نسبت به قسمت اطراف آن می باشد. از معیار های میلان به مرکز استفاده می شود، این مقدارها که مشخص کنندۀ مرکز (data) اند به نام شاخص های مرکزی یا معیار های میلان به مرکز (Measures of location or central Tendency) یاد می شود که عبارت است از:

اوسط حسابی(Arithmetic Mean)

میانه(Median) و مود(Mode)

معیار های انحراف یا معیار های پراگنده گی(Types of dispersion) یا(Measures of dispersion) یا پارا متر های پراکنده گی به طور عموم عبارت اند از:

1- وسعت(Range) یا دامنه تغیرات (ساحه تحول)

2- وریانس(variance)

3- انحراف معیاری(standard Deviation)

4- انحراف وسطی(Mean Deviation)

5- انحراف چارک ها(Quartile Deviation)

طوریکه وسعت (R) یا دامنۀ تغیرات (ساحه تحول) به صورت $R = b - a$ می باشد که b بزرگترین $data$ و a کوچکترین $data$ است اگر $R = 0$ باشد تمام $data$ با هم مساوی اند یا به عبارت دیگر هیچ پراکنده گی در $data$ موجود نیست.

در اعداد 1,5,4,5,4,6,10 وسعت R یا دامنۀ پراکنده گی $R = 10 - 1 = 9$ می باشد وسعت مثل پرامتر های مرکزی میانه و مود نسبت به تمام (data) حساس نیست؛ طور مثال $Range$ اعداد $\{1,2,3,4,8,9,10\}$ نیز $R = 10 - 1 = 9$ می باشد، با وجودیکه در اعداد قبلی اعداد با هم نزدیکتر اند در نتیجه پراکنده گی آنها کمتر می باشد. یکی از معیار های انحراف، انحراف چارک ها می باشد.

معمولاً در ارقام یا اعداد ($data$)، اعداد یا ارقام خیلی کوچک و یا بزرگ موجود می باشند و علاوه بر آن اعداد بیشتر در قسمت های وسط متمرکز می باشد و هرقدر که از وسط (data) دور تر می شویم یا به طرف اعداد کوچکتر یا بزرگتر برویم فریکونسی آن ها کمتر می شود.

پس مقدار های بزرگ یا کوچک به علت کم بودن فریکونسی آن ها نباید نقش در ترسیم توزیع جامعه داشته باشد. اگرآن ها از جامعه احصائیوی حذف شوند، آن چه که باقی می ماند به واقعیت های جامعه نزدیکتر خواهد بود، به

همین منظور در گراف صندوقچه یی برای این که تناظر یا عدم تناظر را روشن نماییم، جامعه راکه به واسطه سه میانه به دست می آوردیم به چهار قسمت مساوی تقسیم می نمودیم و در حقیقت از یک چهارم اول و یک چهارم آخر جامعه صرف نظر می کردیم و طول مستطیل قطعه خطی بود که آن دومیانه ها را باهم وصل می کرد، در حقیقت انحراف چارک ها طول همین مستطیل است.

چون چارک اول کمیتی است که $\frac{1}{4}$ حصه اطلاعات از آن کمتر و $\frac{3}{4}$ حصه اطلاعات از آن بیشتر می باشد و چارک دوم کمیتی است که $\frac{2}{4}$ حصه (data)از آن کمتر و $\frac{2}{4}$حصه (data) از آن بیشتر باشند؛ پس چارک دوم عبارت از میانه می باشد یا $Q_2 = \tilde{x}$

چارک سوم کمیتی است که سه چهارم $\frac{3}{4}$جامعه احصائیوی از آن کمتر و یک چهارم جامعه ا حصائیوی از آن بزرگتر می باشد و چارک سوم به Q_3 نشان داده می شود.

اگر انحراف چارک ها به Q نشان داده شود؛ پس $Q = Q_3 - Q_1$ می باشد.

مثال: انحراف چارک های (data) داده شدۀ ذیل را دریابید:

1 , 5 , 9 , 4 , 3 , 2 , 7 , 6 , 4 , 5 , 7 , 4 , 3 , 5 , 9 , 2 , 7 , 7 , 6 , 5

در قدم اول (data) را مرتب می نماییم

$$1,2,2,3,3, \overset{Q_1}{\downarrow} 4,4,4,5,5 \overset{Q_2}{\downarrow} 5,5,6,6,7 \overset{Q_3}{\downarrow} 7,7,7,9,9$$

تعداد $(data)$ بیست می باشد؛ پس $\frac{1}{4}$ حصه آن مساوی به 5 است و $\frac{3}{4}$ حصه آن 15 عدد می شود؛ پس چارک اول باید از $data(5)$بزرگتر و از 15کمتر باشد یا چارک اول کمیتی است بین 4 و 3 که اوسط حسابی دو عدد عبارت از چارک اول می باشد:

$$Q_1 = \frac{4+3}{2} = 3.5$$

چارک دوم باید از (10)بیشتر و از (10)داتا کمتر باشد یا Q_2 دربین 5و 5 می باشد یا:

$Q_2 = \frac{5+5}{2} = 5$و چارک سوم $Q_3 = \frac{7+7}{2} = 7$

پس انحراف چارک ها عبارت است از: $Q = Q_3 - Q_1 = 7 - 3.5 = 3.5$

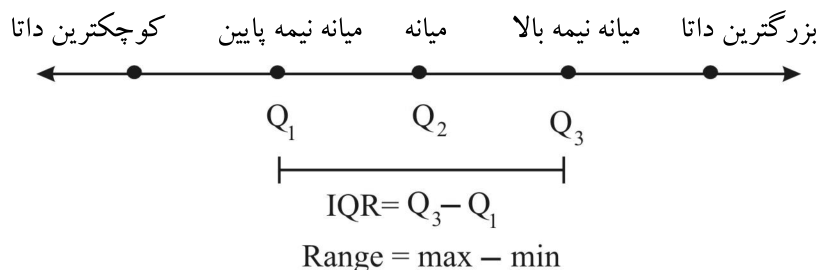
بعضی اوقات انحراف چارک ها از فورمول $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ نیز به دست می آید.

برای دریافت انحراف چارک ها مراحل زیر را در نظر بگیرید.

1) میانه data را معلوم کنید، چند فیصددیتا از میانه بالاتر و چند فیصد data از میانه پاینتر واقع می باشد؟
2) میانه نیمه پایین data را دریابید و چند فیصد data از این میانه پایینتر می باشد.

3) میانه نیمه بالا data را دریابید که چند فیصد data از این میانه بالاتر می باشد.

4) یک خط اعداد را رسم کنید و میانه های که در قدم اول، دوم و سوم یافته شده و هم کمترین و بزرگترین data را بالای این خط اعدادن نشانی کنید.



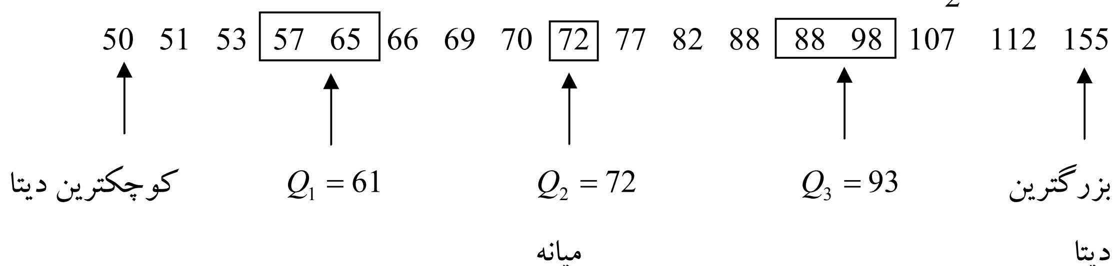
Range = max – min

حاصل تفریق بزرگترین و کوچکترین data عبارت از وسعت (Range) می باشد. و حاصل تفریق بزرگترین و کوچکترین چارک ها $(Q_3 - Q_1)$ به نام انحراف چهارم داخلی (Inter Quartile Range) یاد می شود و یا به (IQR) نشان داده می شود.

مثال: انحراف چارک ها و ساحه تحول دتیای زیر طور زیر به دست می آید:

50 , 57 , 77 , 66 , 53 , 72 , 51 , 88 , 82 , 70 , 112 , 107 , 69 , 88 , 98 , 65 , 155

دیتا را ترتیب کنید میانه قیمت نهم یعنی 72 می باشد میانه نصف دیتا پایین $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$ و میانه نصف دیتا بالا $Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$



$\text{Range} = 155 - 50 = 105$

$\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 93 - 61 = 32$

جواب به سؤال های تمرین

1- ساحۀ تحول، انحراف چارک ها و مود دیتای زیر را تعین کنید و بگویید که تراکم دیتا در کدام ساحه زیاد تر است؟

5 11 12 14 15 15 16 17 30

حل: دیتا را به طور صعودی مرتب می نماییم

ساحه تحول: $30 - 5 = 25$

میانه این دیتا عدد $Q_2 = 15$ می باشد.

$$Q_1 = \frac{11+12}{2} = \frac{23}{2} = 11.5 \qquad Q_3 = \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 16.5 - 11.5 = 5$$

و مود دیتا نیز 15 می باشد.

2- ساحهٔ تحول و انحراف چارک های دیتای زیر را تعین کنید؛ سپس آنها را با انحراف ربعی سوال اول مقایسه کنید.

27 24 21 29 28 26 23 22

حل: دیتای فوق را به صورت صعودی مرتب می نمایم:

21 22 23 24 26 27 28 29

ساحهٔ تحول: $R = 29 - 21 = 8$

انحراف ربعی ویا انحراف چارک ها:

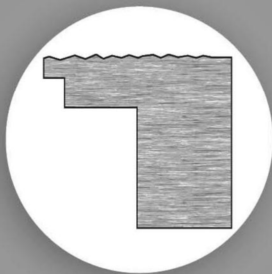
$$Q_2 = \frac{24+26}{2} = 25$$

$$Q_1 = 22$$

$$Q_3 = 28$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 28 - 22 = 6$$

انحراف ربعی سؤال اول 5 و انحراف ربعی در سؤال دوم 6 می باشد؛ پس پراکنده گی اطلاعات در سؤال دوم نسبت به سؤال اول بیشتر می باشد.



واریانس (variance)

صفحۀ کتاب (377)　　وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• طریق یافتن واریانس *data* داده شده را بیآموزند. • توسط هر دو فورمول واریانس *data* داده شده را دریافت کرده بتوانند. • درک کند که واریانس، یک معیار پراکنده گی است که نسبت به تمام دیتا حساس می باشد. • در حل مسایل احصائیوی از فورمول واریانس استفاده کرده بتوانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی ، تخته، چارت، اشکال و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی را از شاگردان بپرسید و هدف سؤال این است که اگر اوسط حسابی عمق حوض معلوم باشد، طور مثال اگر اوسط حسابی عمق 1.5m باشد و اگر بدانیم که تغییرات عمق در اطراف اوسط حسابی یعنی از 1.5m زیاد نیست با اطمینان بیشتری شنا خواهیم کرد. به شرط آن که این پراکنده گی با یک معیار عدد مناسب معرفی شده باشد که این عدد مناسب واریانس می باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت صفحه(377) را استاد محترم با سهم گیری شاگردان حل نماید؛ همچنان هدف فعالیت را واضح سازد که اوسط حسابی عمق این حوض $\frac{1.5m+2.5m}{2}=2m$ می باشد.

استاد محترم شاگردان را همکاری نماید تا طریق یافتن واریانس را بیاموزند.

ثبوت فورمول واریانس ضرور نیست که شاگردان آن را بیاموزند در صورتیکه استاد لازم بداند ثبوت شود. مثال با سهم گیری شاگردان توسط هر دو فورمول حل شود.

در صورتی که *data* صنف بندی شده باشد. فورمول یافتن وریانس آن در کتاب درسی غرض معلومات مزید داده شده است و در معلومات اضافی این درس مثالی نیز توسط این فورمول حل گردیده است.

تحکیم درس: (7) دقیقه

این سؤال را برای تحکیم درس حل کنید.

واریانس اعدادطبیعی ,1,2,3,4,5 را محاسبه کنید.

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\sigma^2=\frac{1}{5}[4+1+0+1+4]=\frac{10}{5}=2$$

7- ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤال ذیل از شاگردان پرسیده شود.

تعداد ساعاتی که 4 محصل در طول هفته غرض مطالعه در کتابخانه اختصاص داده اند قرار ذیل می باشد واریانس این *data* را معلوم کنید.

1,5,7,9

حل: $5.5 = \frac{1+5+7+9}{4} = \bar{x}$ و انحراف از اوسط $3.5\ ,\ 1.5\ ,\ -0.5\ ,\ -4.5$ می باشد.

مجذور انحرافات از اوسط= $20.25, 0.25, 2.25, 12.25$

اوسط مجذور انحرافات از اوسط= $\sigma^2 = \frac{20.25+0.25+2.25+12.25}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$

$\Rightarrow \sigma^2 = 8.75$ وریانس

معلومات اضافی برای معلم

برای این که معیار پراکنده گی نسبت به تمام *data* حساس باشد باید از تمامی *data* در معیار پراکنده گی استفاده شود، برای این کار فرق هر یک از *data* از یک مقدار ثابت محاسبه کرده و باهم جمع می کنیم.

برای این که این طرزالعمل یکنواخت باشد، پس فرق هر دیتا از اوسط حسابی محاسبه می شود یعنی اگر هر *data* عبارت از x_i باشد $x_i - \bar{x}$ انحراف (*data*) i-ام از اوسط حسابی می باشد.

چون از خصوصیات اوسط می دانیم که: $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ می باشد، دلیل صفر شدن آن این است که بعضی از *data* بزرگتر از اوسط و بعضی آن ها کوچکتر از اوسط می باشد یا به عباره دیگر برخی از انحراف ها مثبت و برخی از آن ها منفی می باشد که مجموع آن ها یکدیگر را خنثی می کنند برای رفع این مشکل از قیمت مطلقه استفاده می شود یعنی عوض

$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x})$

از

$|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}| = \sum | x_1 - \bar{x} |$

استفاده می شود.

و واضح است که هر قدر این مقدار بزرگتر باشد پراکنده گی بیشتر است و اگر کوچک باشد، نشان کم بودن پراکنده گی می باشد و اگر مقدار فوق صفر شود بدین معنی است که تمام *data* با هم مساوی اند.

باز هم مشکلی باقی می ماند و آن اینکه اگر اندازه نمونه را بزرگتر سازیم یا *data* دیگری نیز علاوه شود واضح است که مجموعه بالا بیشتر می شود. آیا این درست است که با ازدیاد *data* پراکنده گی نیز بیشتر شود؟ متوجه باید باشید که پراکنده گی یک خاصیت ذاتی جامعه احصائیوی می باشد و نباید باکم شدن یا زیاد شدن *data* کم و یا زیاد شود؛ پس برای این که تأثیر تعداد *data* را از بین برده باشیم مجموع ذکر شده را بر تعداد *data* یا (n) تقسیم می کنیم و به عوض $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}| x_i - \bar{x} |)$ که این را انحراف از اوسط حسابی (انحراف وسطی) می نامند و به عوض

قیمت مطلقه آن می توانیم $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ در نظر بگیریم که این کمیت را واریانس می گویند.

پس معیار پراکنده گی که عبارت از واریانس است به طور ذیل به دست می آید که به (σ^2) یا S^2 نشان داده می شود.

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

به عبارت دیگر واریانس اوسط انحراف های مجذور از اوسط حسابی می باشد. و یا اوسط مربع انحراف مقادیر از اوسط به نام واریانس یاد می شود. که منبحث معیار پراکنده گی در احصائیه مروج می باشد.

- متوجه باید بود که اگر با هر یک از *data* یک عدد ثابت جمع و یا از آن تفریق کنیم در مقدار واریانس تغیری نمی آید؛ اما اگر هر یک از *data* با یک عدد ثابت k ضرب شود، واریانس در k^2 ضرب می شود مثال های ذیل نشان دهنده این مفهوم می باشند:

مثال 1: واریانس اعداد 105 , 104 , 103 , 102 , 101 را دریابید.

از هر یک آن عدد 100 را تفریق می کنیم داریم که:

1,2,3,4,5

$$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$S^2=\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}=\frac{10}{5}=2$$

مثال(2):- اگر واریانس $x_1,x_2...x_n$ مساوی به 5 باشد واریانس $-x_1+5,-x_2+5,...-x_n+5$ را دریابید.

حل: چون عدد 5 با data علاوه شده در واریانس تغییر وارد نمی شود؛ چون هر *data* در عدد (-1) ضرب شده؛ پس واریانس در $(-1)^2$ ضرب می شود.

$$S^2=(-1)^2\cdot 5=5$$

یادداشت: اگر *data* صنف بندی شده باشد واریانس از فورمول ذیل به دست می آید:

$$S^2=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i}$$

مثال(3): واریانس جدول ذیل را دریابید.

x_i	2	4	6
f_i	2	4	2

$$\overline{x}=\frac{2\cdot 2+4\cdot 4+2\cdot 6}{8}=\frac{32}{8}=4$$

$$S^2=\frac{2(2-4)^2+4(4-4)^2+2(6-4)^2}{8}=\frac{16}{8}=2$$

می توانیم واریانس را از فورمول $S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}$ یا از فورمول $S^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\frac{\sum x_i}{n})^2$ و یا $S^2=\frac{1}{n}[x_1^2+...x_n^2]-\overline{x}^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\overline{x}^2$ به دست بیآوریم.

مثال (4): 10 شاگرد در مضمون ریاضی از 100 نمره های ذیل را اخذ کرده اند واریانس آن را معلوم کنید.

46 , 50 , 52 , 60 , 63 , 64 , 51 , 61 , 55 , 66

حل: نخست توسط فورمول $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ واریانس را به دست می آوریم:

x_i	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
46	−10.8	116.64
50	−6.8	46.42
52	−4.8	23.04
60	3.2	10.24
63	6.2	38.44
64	7.2	51.84
51	−5.8	33.64
61	4.2	17.64
55	−1.8	3.24
66	9.2	84.64
568	−	425.60

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{568}{10} = 56.8$ $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{425.60}{10} = 42.56$

سپس طور مستقیم از فورمول $S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x_i}{n})^2$ واریانس را به دست می آوریم

x_i	$(x_i)^2$
46	2116
50	2500
52	2704
60	3600
63	3969
64	4096
51	2601
61	3721
55	3025
66	4356
مجموع 568	32688

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x_i}{n})^2 = \frac{32688}{10} - (\frac{568}{10})^2 = 3268.80 - 3226.24$$

$$S^2 = 42.56$$

و در نتیجه در هر دو صورت عین جواب به دست می آید.

جذر مربع واریانس عبارت از انحراف معیاری می باشد.

$$S = \sqrt{S^2}$$

مثال: اگر احمد و محمود در پنج مضمون نمرات زیررا حاصل کرده باشند، وریانس نمرات احمد و محمود قرار زیر به دست می آید:

احمد	66	43	37	50	54
محمود	54	49	47	48	52

احمد:

$$\bar{x} = \frac{66+43+37+50+54}{5} = 50$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
66	16	256
43	-7	49
37	-13	169
50	0	0
54	-4	25
مجموع	0	490

$$\text{Variance}: \delta^2 = \frac{490}{5} = 98$$

$$\text{S.d}: \delta = \sqrt{98} = 9.9$$

محمود:

$$\bar{x} = \frac{54+49+47+48+52}{5} = 50$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
54	4	16
49	-1	1
47	-3	9
48	-2	4
52	2	4
مجموع	0	34

$$\text{Variance}: \delta^2 = \frac{34}{5} \approx 6.8$$

$\text{S.d}: S = \sqrt{6.8} = 2.6$ انحراف معیاری

- وریانس اعداد زیر را توسط هر دو فورمول محاسبه کنید.

1 5 6 7 9

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$x_1^2 + \dots x_5^2 = 1+25+36+49+81 = 192$$

$$S^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2 = 38.4 - 31.36 = 7.04$$

و یا به طور مستقیم:

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5} = \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5}$$
$$= 7.04$$

- آیا امکان دارد که واریانس یک دیتا صفر باشد اگر جواب بلی باشد تحت کدام شرط صفرشده می تواند؟

جواب: اگرتمام اعداد دیتا با هم مساوی باشند در این صورت واریانس این دیتا مساوی به صفر می شود.

- اگر با هر یک از اطلاعات یک عدد ثابت a جمع شود ورایانس تغییر نمی کند، اما اگر اطلاعات در یک عدد ثابت a ضرب شود. طوری که عدد $a > 1$ باشد. اطلاعات بزرگتر شده و در نتیجه پراکنده گی آنها بیشتر خواهد شد. و اگر $a < 1$ و مثبت باشد اطلاعات با هم نزدیکتر شده و در نتیجه وریانس آنها کمتر خواهد شد. و اگر $a < 0$ باشد همین تاثیر را در پراکنده گی دارد.

طور مثال: در آن صورت اگر x_i معاش مامور دولت باشد و دولت تصمیم بگیرد که معاش هر مامور 1000 افغانی افزود شود در نتیجه وریانس تغییر نمی کند و اگر دولت تصمیم بگیرد طوری که 10 فصید معاش مامورین افزوده شود در آن صورت اگر x_i معاش یک مامور دولت باشد؛ پس 10 فصید آن $0.1x_i$ می شود و بعد از افزودی معاش مامور $x_i = x_i + 0.1x_i = 1.1x_i$ می شود؛ چون $(1.1)^2 = 1.21$ می شود؛ پس بعد از افزودی معاش ورایانس معاش در 1.21 می شود. یعنی پراکنده گی معاش زیاد می شود.

جواب به سؤال تمرین

1- تعداد ساعاتی را که شاگردان در طول یک هفته به ورزش اختصاص داده اند در زیر داده شده است.

3 2 1 4 3 2 2

وریانس این دیتا را حساب کنید.

حل:

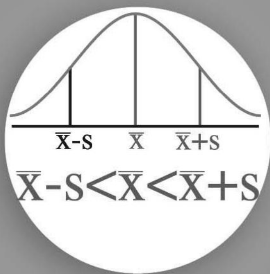
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{ویا :} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{3+2+1+4+3+2+2}{7} = \frac{17}{7} = 2.428$$

$$S^2 = \frac{3^2 + 2^2 + 1^2 + 4^4 + 3^2 + 2^2 + 2^2}{7} - (2.428)^2$$

$$S^2 = \frac{9+4+1+16+9+4+4}{7} - 5.895$$

$$S^2 = \frac{47}{7} - 5.895 = 0.819$$



انحراف معیاری
(Standard deviation)

صفحۀ کتاب (381) وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: • طریق یافتن انحراف معیاری داتای داده شده را بیاموزند. • بفهمند که جذر مربع واریانس عبارت از انحراف معیاری می باشد. • انحراف معیاری *data* داده شده را دریافت کرده بتوانند. • ارتباط بین واریانس و انحراف معیاری را درک کنند. • در حل مسایل احصائیوی از انحراف معیاری استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی ، تخته، چارت، اشکال و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	منحنی که به هر دو طرف متناظر باشد به نام منحنی طبیعی یا(Normal curve) یاد می شود که شکل زنگ (Bell shaped) را دارد. پراکنده گی در منحنی نارمل طوری است که اگر S انحراف معیاری یک جامعه احصائیوی باشد پراکنده گی افراد در جامعه احصاییوی به این صورت است؛ طور مثال اگر اوسط حسابی 5 و انحراف معیاری 2 باشد میخواهیم بدانیم که چند فیصد افراد در فاصله $(5-2, 5+2)$ یعنی در $(3,7)$ قرار دارد در منحنی نارمل 68 فیصد افراد در این ساحه قرار دارند که در معلومات اضافی این درس مثال حل شده موجود است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

چون به این فعالیت شاگردان تا هنوز نا آشنا اند، استاد محترم آنها را همکاری نمایند. نخست جدول را روی تخته بنویسد که x_i یا هر *data* داده شده و $\bar{x}$ اوسط حسابی *data* داده شده می باشد $(7 = \frac{8+9+6+4+8}{5})$ و $(x_1-\bar{x})$ انحراف هر *data* از اوسط حسابی می باشد و $|x_i-\bar{x}|$ قیمت مطلقه انحراف آن و $(x_i-\bar{x})^2$ مربع انحراف *data* از اوسط حسابی میباشد.

واضح است که اوسط زمان تحویلی 7 و اوسط قیمت های مطلقه انحراف ها یا انحراف وسطی عبارت است از: $1.6 = \frac{8}{5} = \frac{1+2+1+3+1}{5}$ و واریانس آن $3.2 = \frac{16}{5} = \frac{1+4+1+9+1}{5}$ می باشد.

جذر مربع واریانس یا انحراف معیاری آن $1.78 = \sqrt{3\cdot 2}$ می باشد

چون شاگردان فورمول واریانس را در درس قبلی خوانده اند؛ پس جذر مربع فورمول واریانس

$s=\sqrt{\frac{\sum (x_i-\overline{x})^2}{n}}$ عبارت از انحراف معیاری می باشد.

شاگردان مجبور نخواهند بود که ثبوت آن را یاد بگیرند در این جا صرف جهت معلومات اضافی آورده شده است.

مثال این درس را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

برای تحکیم درس این سؤال را حل کنید.

سؤال:- انحراف معیاری اعداد 8 , 14 , 10 , 16 , 12 را در یابید.

حل:

$$\overline{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{60}{5}=12$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{40}{5}}=\sqrt{8}=2.83$$

x	$(x-\overline{x})$ (	$(x-\overline{x})^2$
12	0	0
16	4	16
10	-2	4
14	2	4
8	-4	16
60	0	40

ارزیابی درس: (5) دقیقه

تعداد ساعت های که پنج نفر به صورت داوطلبانه دریک شفاخانه خدمت می کنند قرار ذیل داده شده است انحراف معیاری این *data* را محاسبه کنید

1 3 4 5 6

$$\overline{x}=\frac{1+3+4+5+6}{5}=\frac{19}{5}=3.8$$

$$S^2=\frac{(-2.8)^2+(-0.8)^2+(0.2)^2+(1.2)^2(2.2)^2}{5}=2.96$$

$$S=\sqrt{2.96}=1.7$$

معلومات اضافی برای معلم

از این که واحد واریانس برحسب مجذور واحد متحول می باشد می شود که مشکلاتی ایجاد شود؛ طور مثال اگر محمود اندازه قد همصنفی های خود را به واحد متر (m) و احمد اندازه قد شاگردان صنف رابه سانتی متر (cm)اندازهٔ کرده باشد. در این صورت واریانس که احمد محاسبه کرده است (10000) چند واریانس است که محمود اندازه کرده است و به نظر می خورد که در محاسبهٔ احمد مقدار پراکنده گی زیاد می باشد، برای این که این اختلاف از بین برود سعی می شود که تفاوت عمده در واحد واریانس و واحد اوسط حسابی را با جذر گرفتن از واریانس از بین برده شود پس از انحراف معیاری استفاده می شود. جذر مربع واریانس را انحراف معیاری می گویند.

انحراف معیاری به حرف σ و یا S نشان داده می شود.

واحد انحراف معیاری عبارت از واحد متغیر می باشد.

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

1- اگر همه $data$ باهم مساوی باشند واریانس و انحراف معیاری صفر می شود و برعکس اگر واریانس و انحراف معیاری صفر باشد تمام اطلاعات باهم مساوی می باشند؛ طور مثال انحراف معیاری اعداد 20،20،20 صفر می باشد.

2- اگر با هر $data$ یک عدد جمع و یا یک عدد از آن تفریق کنیم واریانس و انحراف معیاری تغیر نمی کند

3- اگر هر $data$ در یک عدد ثابت k ضرب شود، انحراف معیاری در $|k|$ واریانس در k^2 ضرب می شود.

مثال 1: اگر انحراف معیاری $data$ (x,y,z) عدد 5 باشد.

a: انحراف معیاری $(x+3,y+3,z+3)$ را دریابید.

b: انحراف معیاری $(-3x+3,-3y+3,-3z+3)$ را دریابید.

حل: در قسمت a انحراف معیاری با جمع کردن عدد (3) تغیر نمی کند یعنی همان عدد (5) می باشد در قسمت b چون هر $data$ در (-3)ضرب شده؛ پس انحراف معیاری: $s=|-3|\cdot 5=15$ می شود.

مثال 2: انحراف معیاری اعداد (2,6,10,14) چند برابر انحراف معیاری اعداد (1,3,5,7) می باشد؟

حل: چون اعداد (2,6,10,14,) دو چند اعداد (1,3,5,7) می باشد؛ پس انحراف معیاری آن نیز دوچند انحراف معیاری اعداد (1,3,5,7,) می باشد.

مثال 3: اگر واریانس اعداد $x_1,x_2,...x_n$ عدد5 باشد وریانس اعداد $-x_1+5,-x_2+5,...-x_n+5$ چند می شود؟

حل: با جمع کردن عدد 5 واریانس تغییر نمی کند. اما واریانس آن عبارت است از:

$$(-1)^2\cdot 5=5$$

4- در ساحه $(\bar{x}\pm s)$ یا در $\bar{x}-s<\bar{x}<\bar{x}+s$ تقریباً 68.27 فیصد مشاهدات شامل می باشد.

و در ساحه $(\bar{x}\pm 2S)$ تقریباً 95.45 فیصد مشاهدات شامل می باشد.

و در ساحه $(\bar{x}\pm 3S)$ تقریباً 99.73 فیصد مشاهدات شامل است.

مثال 4: در ذیل وزن 12 نوع ادویه مختلف بر حسب گرام داده شده است.

a: اوسط حسابی و b: انحراف معیاری را دریابید.

c: در ساحه $(\bar{x}\pm s),(\bar{x}\pm 2s)$ و $(\bar{x}\pm 3s)$ چند فیصد مشاهدات شامل می باشد.

43,54,45,44,58,47,50,52,51,45,48,46

حل: 43,44,45,45,46,47,48,50,51,52,54,58

x	x^2
43	1849
54	2916
45	2025
44	1936
58	3364
47	2209
50	2500
52	2704
51	2601
45	2025
48	2304
46	2116
583	28549

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{583}{12} = 48.58$$

$$s \cdot D = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{28549}{12} - (\frac{583}{12})^2}$$

$$s = \sqrt{2379.08 - 2360.34}$$

$$s = \sqrt{18.74} \approx 4.33$$

در ساحه $(\bar{x} \pm s) = 48.58 \pm 4.33$

52.91و 44.25؛ پس در نتیجه در این ساحه به تعداد 8 قلم ادویه می باشد که فیصدی آن ها

$$100 \cdot \frac{8}{12} = 66.66 \approx 67\%$$

در ساحه $(\bar{x} \pm 2S)$

$$\bar{x} \pm 2S = 48.58 \pm 2(4.33)$$

57.24و 39.92

به تعداد 11قلم ادویه می باشد.

$$100 \cdot \frac{11}{12} = 91.66 \approx 92\%$$

در حدود $(\bar{x} \pm 3S)$

$$(\bar{x} \pm 3S) = 48.58 \pm 3(4.33)$$

61.57 و 35.59 می باشد

که تمام ادویه ها در این ساحه شامل می باشد؛ پس:

$$100 \cdot \frac{12}{12} = 100\%$$

5- اگر ارقام (*data*) صنف بندی شده باشد در این صورت برای به دست آوردن انحراف معیاری از فورمول ذیل استفاده می شود:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

مثال5: انحراف معیاری اعداد $\{6,6,4,6,4,2,8,8,8,2,2,6,6\}$ عبارت است از:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\overline{x}$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
6	5	30	5.23	0.77	0.59	2.95
4	2	8	5.23	−1.23	1.51	3.02
2	3	6	5.23	−3.23	10.43	31.29
8	3	24	5.23	2.77	7.67	23.01

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i - \overline{x})}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{13}(2.95 + 3.02 + 31.29 + 23.01)} = \sqrt{\frac{1}{13}(60.27)} = \sqrt{4.64}$$

$$s = 2.15$$

جواب به سؤال های تمرین

1- تعداد ساعت های را که چهار دستگاه تلویزیون در بارهٔ معارف پروگرام پخش میکنند در زیر داده شده است. انحراف معیاری دیتا را حساب کنید.

1 3 4 5

حل: چون جذر مربع وریانس را انحراف معیاری میگویند، ابتداء وریانس دیتای فوق را محاسبه می کنیم.

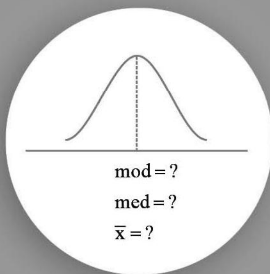
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}{4} - \overline{x}^2 \qquad \overline{x} = \frac{1+3+4+5}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$S^2 = \frac{1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{4} - (3.25)^2$$

$$S^2 = \frac{1+9+16+25}{4} - 10.56$$

$$S^2 = \frac{51}{4} - 10.56 = 12.75 - 10.56 = 2.19$$

انحراف معیاری $S = \sqrt{2\cdot 19} = 1\cdot 479$



مقایسه شاخص های مرکزی توسط منحنی نارمل

صفحهٔ کتاب (371)　　　وقت تدریس(1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	شاگردان در اخیر این درس باید: ● منحنی نارمل را بشناسند. ● بدانند کنند که منحنی نارمل غرض مقایسه معیارهای مرکزی(اوسط حسابی میانه و مود) استعمال می شود. ● درک کنند که در منحنی نارمل موقعیت میانه، اوسط حسابی و مود یکی می باشد یا به عبارت دیگر باهم مساوی می باشند. ($\text{mod} = med = \bar{x}$)
روش های تدریس	سؤال و جواب، کارهای گروپی ، انفرادی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال و رودی برای شاگردان توضیح شود، که در این محنی $\text{mod} = med = \bar{x}$ می باشد و این منحنی یک منحنی متناظر است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را استاد اجرا کنند،در صورت که منحنی متناظر نباشد، پراکنده گی طرف راست و چپ به شاگردان توضیح گردد که اگر پراکنده گی طرف راست باشد در این صورت $\text{mod} < med < \bar{x}$

و اگر طرف چپ باشد در این صورت $\bar{x} < med < \text{mod}$ می باشد.

بعد از توضیح، هر دو مثال را استاد محترم با سهم گیری شاگردان حل کند.

تحکیم درس: (7) دقیقه

اگر اندازهٔ قد 16 شاگرد بر حسب انچ قرار ذیل داده شده باشد:

64 , 67 , 62 , 66 , 63 , 64 , 63 , 69 , 63 , 65 , 67 , 71 , 65 , 64 , 72 , 66

اوسط حسابی و انحراف معیاری این $data$ را محاسبه کنید.

همچنان دریابید که چند فیصد مشاهدات در ساحه $(\bar{x} \pm S)$, $(\bar{x} \pm 2S)$ و $(x \pm 3S)$ شامل می باشند.

نخست دیتا را به ترتیب صعودی می نویسیم:

62 , 63 , 63 , 63 , 64 , 64 , 64 , 65 , 65 , 66 , 66 , 67 , 67 , 69 , 71 , 72

جواب: $s = 2.82$　　　$\bar{x} = 65.69$

در ساحهٔ $(\bar{x} \pm S)$، 75% و در ساحهٔ $(\bar{x} \pm 2S)$ 93.75%, و در ساحهٔ $(\bar{x} \pm 3S)$ 100%, مشاهدات می باشند.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤال زیر از شاگردان پرسیده شود:

اگر توضیح نمرات یک امتحان تقریبا به شکل نارمل باشد اگر اوسط حسابی آن 650 و انحراف معیاری آن 100 باشد:

a) چانس یک نمره تصادفی در بین 450 و 850 چند فیصد می باشد؟

b) از 1000 نمره چند نمره در بین 450 و 850 خواهد بود؟

حل:

(a

$\sigma = 100$ و $\bar{x} = 650$

$650 - 2\sigma \le \bar{x} \le 650 + 2\sigma$

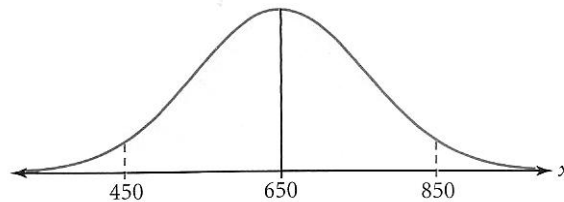
پس احتمال یک نمره بین(450 و 850) ، 95% می باشد.

(b

95% عدد 1000 عبارت است از:

$0.95 \cdot 1000 = 950$

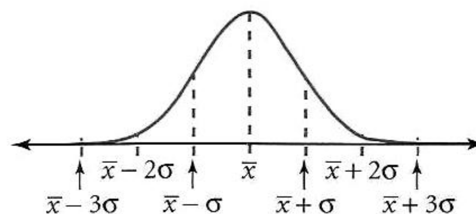
یعنی از 1000 نمره 950 نمره بین 450 و 850 می باشد.



معلومات اضافی برای معلم

1- توزیع نارمل (Normal Distributions): عبارت از توزیع متناظر *data* نسبت با اوسط حسابی ($\bar{x}$) می باشد. منحنی که از نقاط تنصیف مستطیل ها در هستو گرام (Histogram) که دیتا به شکل نارمل توزیع شده باشد بگذرد به نام منحنی نارمل (Normal Curve) یاد می شود که منحنی نارمل توسط اوسط حسابی و انحراف معیاری تعریف می شود.

منحنی معیاری نارمل (Standard Normal Curve) آن است که اوسط حسابی آن صفر و انحراف معیاری آن 1 باشد. شکل زیر را مشاهده کنید.



2- نارمل منحنی به شکل یک مودل قبول شده است.

a) گراف نارمل منحنی یک تابع ریاضی بوده و برای حادثات اتفاقی یک مودل می باشد.

b) تعداد نارمل منحنی ها زیاد بوده که توسط قیمت های مشخص انحراف معیاری و اوسط حسابی تعین میگردد.

c) نارمل منحنی شکل متناظر دارد که ارتفاع اعظمی آن در وسط قرار دارد.

d) نارمل منحنی یک منحنی متمادی می باشد یا برای هر قیمت x یک قیمت y وجود دارد.

e) قیمت y هروقت مثبت بوده و قیمت های x یا مثبت یا منفی می باشد.

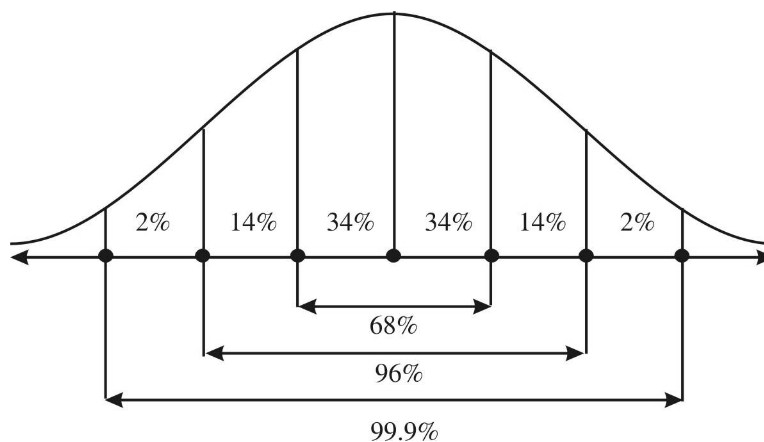
f) نارمل منحنی محور x را قطع نمی کند یا محور x مجانب افقی آن است.

g) سطح مجموعی زیر منحنی 1 واحد می باشد.

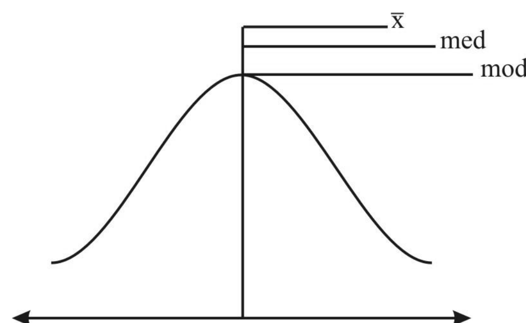
طور مثال اگر اوسط حسابی *data* عدد 5 و انحراف معیاری 2 باشد، می خواهیم بدانیم که چند فیصد دیتا در انتروال $(5-2,5+2)$ یا $(\bar{x}-S,\bar{x}+S)$ قرار دارد یا در انتروال $(3,7)$ قرار دارد در منحنی ذیل نشان داده شده است که 68% می باشد و همچنین در انتروال $(5-4\ ,\ 5+4)$ یا در $(\bar{x}-2S,\bar{x}+2S)$ و یا در $(1,9)$، 96% دیتا قرار دارد و بالاخره در بین $(5-3S\ ,\ 5+3S)$ تقریباً 100% دیتا قرار دارند.

مقادیر روی منحنی تقریبی می باشند که این محاسبه درمثال معلومات اضافی درس انحراف معیاری به دست آورده شده است.

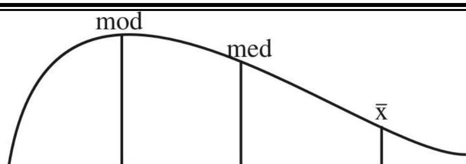
اگر S جذر واریانس یا انحراف معیاری باشد در توزیع نورمال در ساحه $\bar{x}\pm S$ تقریباً 68.27% مشاهدات، در ساحه $\bar{x}\pm 2S$ تقریباً 95.45% مشاهدات و در ساحه $\bar{x}\pm 3S$ تقریباً 99.73% مشاهدات شامل می باشند.



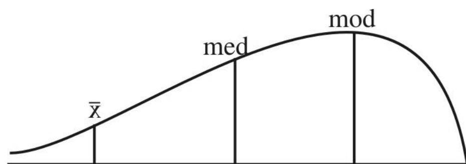
اگر منحنی متناظر باشد در این صورت $\text{mod} = med = \bar{x}$ می باشد.



اگر پراگنده گی طرف راست باشد $\text{mod} < med < \bar{x}$ می باشد؛ مثل شکل ذیل:

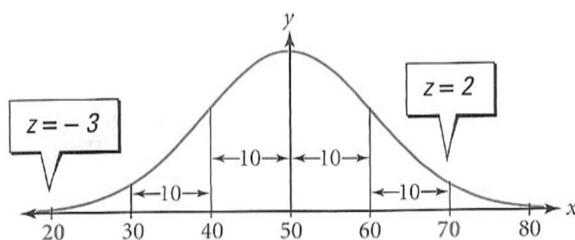


و اگر دامنه پراکنده گی طرف چپ باشد $\bar{x} < med < \text{mod}$ می باشد.



نمره های Z (Z- scores): یک اندازه یی می باشد که به معلوم بودن اوسط حسابی و انحراف معیاری فاصله نمره را از اوسط نشان می دهد.

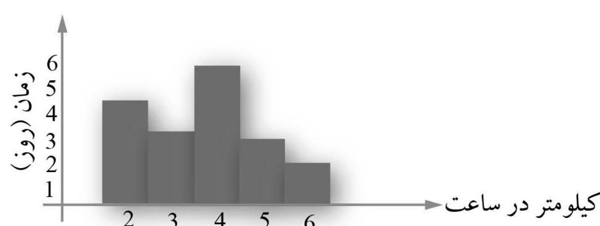
طور مثال: اگر اوسط حسابی یک دیتا عدد 50 و انحراف معیاری آن 10 باشد؛ پس (Z- scores) نمرهٔ 70 عدد 2 می باشد؛ زیرا به اندازهٔ 2 واحد بالاتر از اوسط حسابی است. Z- Scores نمره 20 عبارت از 3- می باشد. به این معنی که به اندازه 3 پایین تر از اوسط حسابی می باشد. شکل زیر را مشاهده کنید.



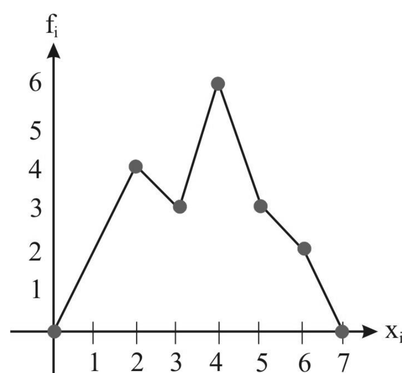
حل تمرین فصل:

1- گراف زیر نشان دهندهٔ توزیع سرعت باد در 19 روز است با استفاده از اطلاعات داده شده در گراف، گراف چند ضلعی کثرت را برای سرعت باد رسم کنید. اگر حد اقل سرعت باد برای راندن یک قایق بادی 5 کیلومتر فی ساعت لازم باشدچند روز برای راندن قایق بادی مناسب است؟

چرا در این مسأله گراف چند ضلعی کثرت مناسب تر از گراف مستطیلی است؟



حل:



از شکل مشاهده می شود که پنج روز برای راندن قایق مناسب است.

غرض گراف چند ضلعی کثرت مناسب است؛ زیرا که سرحد بالایی و پایانی صنوف معلوم نیست؛ اما نقاط وسطی صنوف در شکل داده شده است و برای ترسیم گراف چند ضلعی کثرث نقاط وسطی به کار میرود؛ بنابرآن گراف چند ضلعی کثرت مناسب است.

2- گراف چند ضلعی کثرت گرافی است که................ روی محور افقی................ روی محور عمودی نشان داده میشود.

الف) مرکز دسته ها- کثرت نسبی

ب) کثرت نسبی – مرکز دسته ها

ج) حدود دسته ها

د) مرکز دسته ها – کثرت مطلق

حل: جواب درست جز (د) میباشد.

3- گراف ساقه و برگ داده شده است:

ساقه	
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

دیتای موجود در این گراف را بنویسید.

حل: دیتای موجود گراف:

10 13 13 14 20 22 24 28 28 32

4- از دوران کدام گراف به اندازه 90° (خلاف حرکت عقربه ساعت) گراف میله یی حاصل میشود.

الف: گراف ساقه و برگ

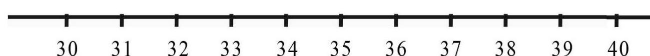
ب: گراف مستطیلی

ج: گراف چند ضلعی کثرت

د: گراف دایروی

حل: جز الف صحت دارد.

5- گراف زیر نمرات امتحان صنفی سه صنف الف، ب ، و ج را در امتحان ریاضی نشان میدهد. با توجه به گراف داده شده سؤالات زیر را پاسخ دهید!



صنف الف (A)

صنف ب (B)

صنف ج (C)

- کدام صنف بیشترین ساحۀ تحول را دارد؟
- میانۀ نمرات کدام صنف از همه بیشتر و میانه نمرات کدام صنف از همه کمتر است؟
- پراکنده گی نمرات کدام صنف بیشتر از همه است؟
- این سه صنف را با توجه به نمرات که در امتحان اخذ نموده اند از ضعیف ترین به قوی ترین مرتب کنید.

حل:

$R_A = 37.5 - 33 = 4.5$

$R_B = 37.5 - 30 = 7.5$

$R_C = 37.5 - 32 = 5.5$

– دیده میشود صنف ب بیشترین ساحۀ تحول دارد.

– میانه صنف ج از همه بیشتر و از صنف ب از همه کمتر می باشد.

– پراکنده گی صنف ب بیشتر می باشد.

– صنف ب، صنف ج، صنف الف

$\bar{x}$ الف =36.41

$\bar{x}$ ب=34.94

ج $\overline{x}=35.92$

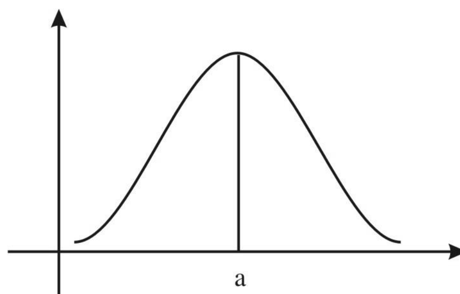
6- در گراف زیر مقدار a کدام یک از مفاهیم زیر را وانمود می سازد؟

الف: میانه

ب: اوسط

ج: چارک سوم

د: مود



حل: طوریکه از شکل معلوم میشود منحنی متناظر است؛ بنابر آن میانه اوسط و مود در نقطهٔ a با هم مساوی اند.

7- دو کار خانهٔ تولید کنندهٔ مواد غذایی A و B بسکیت را دربسته بندی 48 گرامی به فروش میرساند.

اگر پنج بستهٔ بسکیت به صورت تصادفی از یک فروشگاه مواد غذایی از دو محصول انتخاب شود و تمام وزن بسته ها به دقت اندازه گیری شود نتیجهٔ زیر به دست می آید.

A : 48.08 48.32 47.96 47.84 47.96

B : 49.16 48.84 48.88 49.08 49

- کدام کارخانه بسکیت بیشترین بسته ها را می فروشد؟ برای به دست آوردن حل سؤال از چه شاخصی استفاده میکنید؟
- کدام کار خانه ها در توزیع بسکیت یکسان عمل کرده اند؟

حل: برای به دست آوردن حل سؤال از شاخص ساحهٔ تحول استفاده می کنیم.

$R_A = 48.32 - 47.84 = 0.48$

$R_B = 49.16 - 48.84 = 0.32$

- پراکنده گی در B کمتر است نسبت به A

- ثبات در کارخانه B نظر به کارخانه A بیشتر است.

$$\overline{x}_A = \frac{48.08+48.32+47.96+47.84+47.96}{5} = \frac{24.16}{5} = 48.032$$

$$\overline{x}_B = \frac{49.16+48.84+48.88+49.08+49}{5} = \frac{244.96}{5} = 48.992$$

$$S = \frac{|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+|x_3-\overline{x}|+|x_4-\overline{x}|+|x_5-\overline{x}|}{n}$$

$$S_A = \frac{|48.08-48.032|+|48.32-48.032|+|47.96-48.032|+|47.84-48.032|+|47.96-48.032|}{5}$$

$$S_A = \frac{0.048+0.288+0.072+0.192+0.072}{5} = 0.1344$$

$$S_B = \frac{|49.16-48.992|+|48.84-48.992|+|48.88-48.992|+|49.08-48.992|+|49-48.992|}{5}$$

$$S_B = \frac{0.168+0.152+0.112+0.088+0.008}{5} = 0.1056$$

کارخانه B در توزیع بیسکیت یکسان عمل کرده است.

8- اگر ساحهٔ تحول برابر به صفر باشد، در بارهٔ دیتا چه نتیجه می گیرید؟

حل: تمام دیتا ها باهم برابر اند.

$$x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$$

9- تعداد ساعاتی را که شاگردان در طول یک هفته به ورزش اختصاص داده اند در زیر داده شده است:

1 5 7 9

واریانس این دیتا را حساب کنید.

حل:

$$\overline{X} = \frac{1+5+7+9}{4} = \frac{22}{4} = 5.5$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{(1-5.5)^2 + (5-5.5)^2 + (7-5.5)^2 + (9-5.5)^2}{4} = \frac{(-4.5)^2 + (-0.5)^2 + (1.5)^2 + (3.5)^2}{4}$$

$$= \frac{20.25 + 0.25 + 2.25 + 12.25}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 8.75$$

10- در جدول زیر واریانس را محاسبه کنید.

xi	25	35	45
fi	10	25	15

حل:

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$$

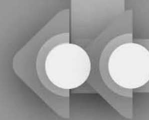
$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{250 + 875 + 675}{50} = \frac{1800}{50} = 36$$

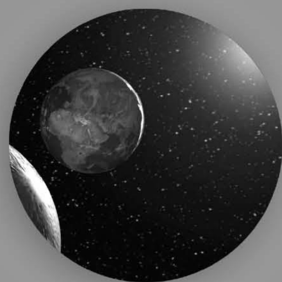
$$S^2 = \frac{10(25-36)^2 + 25(35-36)^2 + 15(45-36)^2}{50}$$

$$S^2 = \frac{1210 + 25 + 1215}{50} = \frac{2450}{50} = 49$$

فصل نهم
منطق ریاضی


فكر





استدلال درک شهودی

صفحهٔ کتاب: (391) **وقت تدریس (1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• بفهمند که درک شهودی می تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد. • درک کنند که با استفاده از درک شهودی نمی توان با اطمینان گفت که نتیجه صد در صد درست است. • بفهمند که انسان برای رسیدن اطمنیان قلبی در مورد درست بودن مفاهیم مجرد به درک شهودی و تجربی نیاز دارد. • درک کنند که نتیجه گیری از درک شهودی می تواند پایه گذار احکام و قضایای درست باشد. و نیز باعث تلاش حل مسأله و ایجاد انگیزه یی می باشد.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و...
مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
مـــواد درســـی توضـــیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی توضیح گردد. طی قرن های متمادی، مردم با ورمیکردند که زمین هموار وستاره ها به دورآن می چرخند. آنها نظریه گردبودن زمین و دورخوردن زمین به دور آفتاب را رد میکردند. حال آنکه امروز هرشخصی این نظر را تایید می کند؛ زیرا با شهود مردم آن زمان مطابقت نداشت.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه:

بعد از تعریف درک شهودی فعالیت این درس را شاگردان به انجام برسانند.

استاد محترم نتیجه را به شاگردان توضیح کند. که در بسیاری موارد درک شهودی به ماکمک می کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس های بهتری برای اثبات قسمت های مختلف بزنیم وچنین حدس ها کم و بیش محتمل و به صورت استدلال موقت، رضایتی در ما به وجود می آورد که برای دستیابی به یک استدلال حتمی تلاش کنیم.

تحکیم درس: (7) دقیقه:

سؤال اول تمرین را غرض تحکیم درس حل کنید.

ارزیابی درس (5) دقیقه

غرض ارزیابی سؤال دوم از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

وَإِذْ قَالَ إِبْرَاهِيمُ رَبِّ أَرِنِي كَيْفَ تُحْيِي الْمَوْتَى قَالَ أَوَلَمْ تُؤْمِن قَالَ بَلَى وَلَكِن لِّيَطْمَئِنَّ قَلْبِي قَالَ فَخُذْ أَرْبَعَةً مِّنَ الطَّيْرِ فَصُرْهُنَّ إِلَيْكَ ثُمَّ اجْعَلْ عَلَى كُلِّ جَبَلٍ مِّنْهُنَّ جُزْءًا ثُمَّ ادْعُهُنَّ يَأْتِينَكَ سَعْيًا وَاعْلَمْ أَنَّ اللّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ (260) بقره

و (یاد کن) آنگاه که ابراهیم گفت: (پروردگارا، به من نشان ده؛ چگونه مرده گان را زنده می‌کنی؟) فرمود: (مگر ایمان نیاورده‌ای؟) گفت: (چرا، ولی تا دلم آرامش یابد.) فرمود: (پس، چهار پرنده برگیر، و آنها را پیش خود، ریز ریز گردان؛ سپس بر هر کوهی پاره‌یی از آنها را قرار ده؛ آنگاه آنها را فرا خوان، شتابان به سوی تو میایند، و بدان که خداوند توانا و حکیم است.) (260) بقره

- پولیا می گوید: "ریاضی دارای دو جنبهٔ است، که یک جنبهٔ آن ساختار شهودی و تجربی ریاضی و جنبه دیگر آن ساختار مجرد است."

شاگردان برای درک و پذیرش اثبات و اطمینان از صحت بودن یک مفهوم ریاضی، نیاز به تقویت شهود و رسیدن به استدلال از طریق تجربه و آزمایش را دارند تا زمینه مساعد شود که درک تجریدی صورت گیرد. در مورد پولیا می گوید: " سعی کنید آنچه را که شهودی به نظر می رسد به طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده اید به طور شهودی درک کنید که این ورزش مغزی می باشد."

هدف این است که مطمئن بودن از یک چیزی یک مسأله است و دانستن این که چرا آن چیز درست است مسأله دیگری و هدف ما و شما نیز دانستن این چراها است.

ارسطو با تکیه برعقل سلیم، حکم کرده بود که در سقوط آزاد جسم سنگین تر از جسم سبک تر زودتر به زمین میرسد. و تا زمانی که مشاهده و تجربه اساس نتایج علمی قرار نگرفت، دانشمندان نیز از نظرنادرست ارسطو پیروی می کردند. عقل سلیم (استدلال ذهنی) و (منطق درونی) تنها زمانی می توانند ما را به سمت کشف حقیقت راهنماباشد که متکی برمشاهده و تجربه (چه تجربه در عمل و چه تجربه در ذهن و اندیشه) باشد. آنگاه می توانیم با نیروی عقل و استدلال ذهنی، را بطه های پنهانی را کشف می کنیم و حقیقت را حدس می زنیم . این حدس، در دانش طبیعی به کمک مشاهده و آزمایش، و در دانش ریاضی با استدلال منطقی تایید یا تکذیب میشود.

حل تمرین:

1- کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه عبارت از خط مستقیم است، آیا درک این مسأله یک درک شهودی است؟ چگونه استد لال میکنید؟

حل: درک مسأله فوق یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال می باشد.

2- کدام یک از احکام زیر با روش استدلال شهودی قابل درک است؟

a) زوایای مقابل یک متوازی الاضلاع مساوی اند.

b) در لوزی، قطر ها باهم عمود و ناصف یکدیگراند.

c) در یک مثلث قایم الزاویه وتر از هر یک دو ضلع دیگر بزرگتر است.

حل: جزء c با روش استدلال در ک شهودی قابل درک می باشد؛ ولی جزء a و b بدون استدلال و ثبوت درک شهودی ندارد.



استدلال تمثیلی و قیاسی

صفحهٔ کتاب: (393) **وقت تدریس (1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• بفهمند که تمثیل تنها می تواند اندیشه یی را در ذهن ما بیدار کند و بریک یا چند حالت مشاهده و آزمایش تکیه می کند. • بفهمند که تمثیل عبارت از نتیجه گیری جزئی می باشد یا شباهتی را به شباهت دیگری سرایت دادن است. • بفهمند که قیاس در واقع یافتن مشابهت بین مفاهیم گوناگون می باشد. • درک کنند با وجودتیکه تمثیل دارای محدودیت می باشد. می تواند در ایجاد یک زمینه شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و ثبوت های ریاضی کمک کند.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و...
مواد درسی و ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی، سؤال وردی توضیح گردد، که غرض از یافتن مشابهت می باشد و هدف از تخم مرغ است.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

استاد محترم، استدلال تمثیلی را تعریف کند.

فعالیت این درس را شاگردان در گروپ ها کار کنند واستاد محترم آن ها را راهنمای و همکاری نماید. مثال های اول و دوم را به سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس استاد محترم می تواند یک مثال طوری ذیل به شاگردان ارائه کند.

اگر m و n اعداد طبیعی باشند، پس $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

و این حالت را در صورتی که m و n اعداد طبیعی نباشند نیز به کار می برند.

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x^5}$$

این گونه استدلال، استدلال تمثیلی می باشد.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس غرض ارزیابی از شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

تمیثل (Analogies)

قیاس (deduction)

- در اکثر کار های روزمره زنده گی از نتیجه گیری های سطحی تا موفقیت های عمده علمی و یا کار های هنری از تمثیل یا قیاس استفاده می کنیم.

قیاس: یافتن نوع مشابهت بین مفاهیم گاناگون می باشد که در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است.
انواع تمثیل می توانند که در ایجاد یک زمینه شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات های ریاضی کمک موثر نماید.
استدلال تمثیلی را بعضی (استدلال کودکانه) می گویند که نام علمی آن (تمثیل و استدلال تمثیلی) می باشد.
فقهیان تمثیل را (قیاس فقهی) می گویند؛ اما در این جا قیاس نه به معنای که در منطق به کار می رود (داوری بر اساس یک حکم کلی و عام) بلکه به معنای شباهت گرفته شده است. یعنی هدف قیاس منطقی نیست، قیاس به معنی شباهت و تمثیل به کار می رود. طور مثال (قیاس به نفس) یعنی هرچه که در خود می بینی به دیگران هم نسبت بدهید. یا نابرابر بودن پنج انگشت بر نابرابری حقوق انسان ها شابهت دارد. در حقیقت از استدلال تمثیلی استفاده شده است.

- تمثیل را نمی توان به جای استدلال ریاضی (که در منطق به آن استدلال قیاسی می گویند) به کار برد.

توسط تمثیل، تنها می توانیم حدس بزنیم که این حدس در عمل امکان دارد که درست یا نادرست باشد و تنها استدلال قیاسی است که می توان به چند وچون آن پی برد یا تمثیل می تواند انگیزه یی برای جستجو باشد.
تمثیل عبارت از درست دانستن نتیجه یی که از یک حالت خاص به دست می آید در حالت خاص دیگری.
قیاس عبارت از سرایت دادن یک قانون کلی، به حالت جزئی، درست دانستن یک نتیجه که برای حالت عمومی ثابت شده باشد در بارهٔ حالت خاص، یا از کُل به جز . استدلال قیاسی خصوصیت ریاضیات است.
سؤال خلق میشود ریاضیات که بر استدلال قیاسی تکیه دارد، آیا دانشی یقینی، بی تغییر و در قانون خود، تکامل ناپذیر است؟
درست است که ریاضیات، دانش منطقی، استنتاجی و یا به اصطلاح قیاسی است؛ ولی نباید فراموش کرد که اساس مفاهیم و قوانین آن بر مشاهدات، آزمایش و عمل استوار می باشد. هرشاخهٔ از ریاضیات بر تعریف ها و اصول موضوعی قرار دارد.
استدلال را از هیچ نمی توان آغاز کرد، استدلال نوعی تکیه گاه لازم دارد که برای همه پذیرفتنی باشد و این تکیه گاه در ریاضیات همان اصول موضوعه می باشد که به اثبات نیاز ندارد و درستی آن ها را همه پذیرفته اند و نظر به زمان اصول سابق امکان دارد اصلاح شود؛ پس ریاضیات هم، در تحلیل اخر، مثل هر دانش دیگری از طبیعت برخاسته است و همراه با فاش شدن راز های بیشتری از قوانین حاکم برطبیعت، تغییر تکاملی دارد و قوانین و رابطه های قبلی را تعمیم بیشتر می دهند.
ریاضیات هم، مثل هر دانش دیگری زنده است، همچو هر موجود زنده، هرگز در جای خود توقف نمی کند و می تواند تا مرزها پیش برود که انسان امروزی تصور آن ها را در ذهن خود نمی تواند داشته باشد.

حل تمرین:

1. بیان: «سالی که نیکو است از بهارش پیداست» به چگونه یک استلالال دلالت میکند.

a) استدلال درک شهودی.

b) استدلال قیاسی.

c) هیچگونه استدلال در آن وجود ندارد.

حل: جزءb صحت دارد یک استدلال قیاسی می باشد.

2. توسط استدلال قیاسی در کدام یک از مثلث ها با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نتیجهٔ زیر اثبات شده میتواند:

$Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$

حل: در مثلث قایم الزاویه.



استدلال استقرایی
(Inductive reasoning)

صفحهٔ کتاب: (395) وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• بفهمند که استدلال استقرایی از جز به کُل رسیدن است. • درک کنند که در حقیقت استدلال استقرایی تعمیم دادن خاصیتی در مورد یک نمونهٔ کوچک به نمونهٔ بزرگ می باشد. • درک کنند که استدلال استقرایی ما را به احتمال وجود قانون مندی کُلی در مسایل راهنمای می کند. و وجود خطا در مشاهدات یکی از اشکالات روش استقرایی است.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی
مواد درسی و ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و ...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی را از شاگردان بپرسید. اگرانها جواب داده نتوانند شما کمک کنید تا جواب درست را دریابند.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت درس را شاگردان در گروپ های مناسب کار کنند و استاد محترم آن ها را نظارت راهنمایی و همکاری نماید.

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+9=25=5^2$

$1+3+5+...+n=n^2$

نتیجه فعالیت را به شاگردان توضیح کنید. مثال های اول و دوم را با سهم گیری شاگردان حل نمایید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

سؤال دوم تمرین درس را حل نمایید که جواب آن عبارت است از:

$1\cdot 8+1=9$

$12\cdot 8+2=98$

$123\cdot 8+3=987$

$234\cdot 8+4=9876$

$12345\cdot 8+5=98765$

$123456\cdot 8+6=987654$

ارزیابی درس: (5) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس را از شاگردان بپرسید.

جواب جزء(ب) درست میباشد.

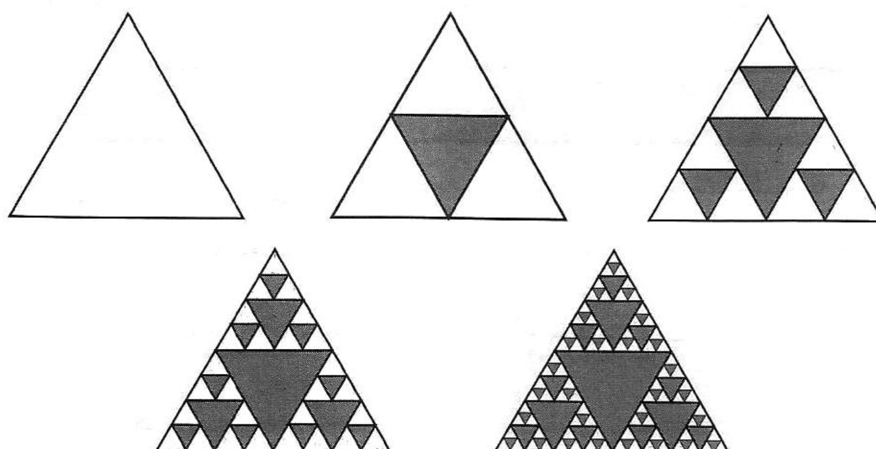
معلومات اضافی برای معلم

وقتی که مریض به داکتر مراجعه می کند داکتر با استفاده از تجربهٔ خود، حدس های در مورد نوعیت مریضی می زند. در این وقت داکتر تنها به احساس تجربوی خود اکتفا نمی کند و با انجام آزمایش های متعدد و مشاهده علامت های مختلف، در مورد نوعیت مریضی و طریق درمان تصمیم نهایی می گیرد. به این ترتیب داکتر با مشاهده، جمع آوری اطلاعات از طریق آزمایش و اندازه گیری در آنها مریضی را تشخیص می کند. روش استدلال در مسایل طبی و علوم تجربی، استقرایی است. در ریاضی نیز از استدلال استقرایی به حیث یک طریق خوب حل یک مسأله استفاده می شود. در چنین روش نخست حدس می زنیم؛ سپس حدس های خود را دقیق و دقیقتر می کنیم که در نتیجه در بارهٔ درست بودن آن حکم می کنیم.

مثال: یک مثلث متساوی الضلاع را مطابق شکل در نظر بگیرید.

a) وسط اضلاع مثلث را طوری که در شکل نشان داده شده است با هم وصل کنید.

b) سه مثلثی که در کنار ها تشکیل می شود در نظر بگیرید و مثلث وسطی را سیاه کرده حذف کنید این کار را روی سه مثلث جدید تکرار کنید. به این ترتیب 9 مثلث انطباق پذیر تشکیل می شود.



اول: تعداد مثلث های جدیدی را که در هر یک از مراحل اول الی چهارم ایجاد شده اند بشمارید و در جدول زیر بنویسید.

مرحله	0	1	2	…	n
تعداد	1				

برای دریافت تعداد مثلث های که در مرحله n- ام تشکیل می شود کدام فرمول را پیشنهاد کرده می توانید؟

این یک مثال استدلال استقرایی می باشد.

- استدلال استقرایی عبارت از عبور جزئی به مطالب کُلی است یا نتیجه گیری کُلی براساس مشاهده موارد

جزیی به نام استدلال استقرایی یاد می گردد. علما از این روش در کشف قوانین طبیعت استفاده می نمایند.
و ریاضی دانان برای ثبوت قضایای ریاضی از این روش استفاده می کنند. متوجه باید بود، که وجود خطا در مشاهدات و محدود بودن تعداد مشاهدات یکی از اشکالات روش استقرایی می باشد؛ طور مثال:

$6=1^2+1^2+2^2$

$14=1^2+2^2+3^2$

$24=2^2+2^2+4^2$

$59=1^2+3^2+7^2$

$61=3^2+4^2+6^2$

آیا به کمک استدلال استقرایی می توان نتیجه گرفت که هر عدد طبیعی را به صورت حاصل جمع مربع کامل اعداد طبیعی ارائه نمایم .

چون اعداد اولیه (Prime Numbers) مثل 17، 19، 23 وغیره را نمیتوانیم به شکل حاصل جمع مربع کامل اعداد طبیعی بنویسیم؛ پس این نتیجه درست نیست و این یک محدودیت استدلالی استقرایی می باشد.

بدین معنی که استدلال استقرایی همواره نمیتواند نتیجۀ درست را ارائه نماید.

اما می تواند زمینۀ خوبی برای اصل استقرایی ریاضی باشد، که یکی از روش های مهم استدلال در ریاضیات به شمارمیرود.

در علوم تجربی به این نوع استدلال روش تجربی یا علمی و در ریاضی به آن استدلالی استقرایی گفته میشود.

نتیجه گیری های احصائیه را می توان نمونه یی از تعمیم به کمک استقرا دانست.

در واقع تمثیل اغاز استقرا می باشد . استدلال تمثیلی بر یک یا چند حالت مشاهده و آزمایش تکیه می کند و استدلال استقرایی، بر مشاهدات و ازمایش های مکرر استوار است.

استقرا به طور عموم، با تجزیه و تحلیل و مقایسه مشاهدات و نتیجه های ناشی از آزمایش آغاز می شود؛ سپس نتیجه یا نتیجه های که در مورد پدیده های مشابه دیگری حدس زده می شود و بعد از مشاهدات و آزمایش های استنتاج استقرایی به دست می آید و پذیرفته میشود.

که این استنتاج (رابطه، قاعده، قانون و....) برای همه حالت های مشابه درست است، به همین دلیل است، وقتی که نتوانیم آزمایش را در باره همه پدیده های مشابه تحقیق کنیم، استقرا را استقرایی ناقص و نتیجه پذیرفته شده را فرضیه می گویند.

تنها در حالتی می توان به نتیجه های حاصل از استقرا اطمینان قطعی یافت که حالتی برای مشاهده یا آزمایشی باقی نمانده باشد؛ پس به طور قطع حکم میشود که این را استقرایی کامل میگویند.

که استقرایی کامل همان استقرایی ریاضی است که در درس آینده با آن آشنا خواهیم شد.

حل تمرین:

1. روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدود از مشاهدات چگونه یک استدلال است؟

الف) استدلال قیاسی یا تمثیلی

ب) استدلال استقرائی

ج) استدلال درک شهودی

حل: جزء ب صحت دارد. استدلال استقرایی می باشد.

2. با دقت به ترتیب اعداد خانه های خالی زیر را تکمیل نمایید.

$1\times 8+1=9$

$12\times 8+2=98$

$123\times 8+3=987$

$1234\times 8+4=9876$

3-

a) حل سؤال شماره 2 را در نظر گرفته آیا گفته می توانید که ترتیب فوق می تواند تا بی نهایت ادامه یابد؟

حل: نمیتوانیم تا بی نهایت ادامه دهیم.

b) بدون محاسبه با توجه به تمرینات بالا اعداد را که در تساوی های زیر صدق می کند حدس بزنید:

حل:

$12345\times 8+5=98765$

$123456\times 8+6=987654$



روش استقرایی ریاضی

صفحهٔ کتاب: (397)　　وقت تدریس (1 ساعت درسی)

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• بفهمند وقتی که از احکام جزئی به احکام کلی برسیم، روش نتیجه گیری را استقرا می گویند. امکان دارد ما را به نتیجه درست و یا نادرست برساند. • بیاموزند که اگر یک بیانیه برای $n=1$ درست باشد و با فرض صحت $n=k$ بتوانیم صحت بیانیه برای $k+1$ را ثبوت نماییم پس این بیانیه برای هر عدد طبیعی صحت دارد که این روش را استقرایی ریاضی می گویند. • اهمیت روش استقرایی ریاضی را درک کنند که استقرایی ریاضی یک خصوصیت کُلی ، برای همه اعضأ یک مجموعه بی پایان است.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و ...
مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی در مورد بازی دومینو معلومات داده شود. هدف این است که برای $n=1$ یک رابطه درست باشد و با فرض صحت برای $n=k$، صحت رابطه را برای $k+1$ به اثبات رسانده شود. که در حقیقت این روش یک روش استقرایی ریاضی می باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند و استاد محترم آنها را همکاری نماید.

حل این فعالیت طوری ذیل می باشد.

مربع مجموع	مجموعه مکعب ها	مکعب های اعداد متوالی
1^2	1	1^3
3^2	9	1^3+2^3
6^2	36	$1^3+2^3+3^3$
10^2	100	$1^3+2^3+3^3+4^3$
15^2	225	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

نتیجه آن این است که:

مجموعهٔ مکعب های اعداد متوالی مساوی است به مربع مجموع آنها یا $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

استاد محترم توضیح کند که توسط قیمت های جدول فوق یک نتیجه گیری کامل نمی باشد.

تاکه توسط روش استقرایی به ثبوت رسانده نشود. پس استاد محترم فورمول را برای $n = k + 1$ طور ذیل ثبوت کند:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 ....I$$

آیا برای $(n+1)$ عدد مسلسل نیز درست است؟ یعنی رابطه

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 ....II$$

نیز برقرار است؟

اگر رابطهٔ اول از رابطهٔ دو تفریق شود داریم که:

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\frac{n+1}{2})^2[(n+2)^2 - n^2] = \frac{(n+1)^2}{4}[n^2 + 4n + 4 - n^2]$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}[4n+4] = \frac{(n+1)^2}{4}(n+1)4 = (n+1)^3$$

یعنی تساوی رابطهٔ III نتیجه شد که معادل رابطهٔ II می باشد.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

در نتیجه با اطمینان گفته می توانیم که مجموع مکعب های n عدد متوالی مساوی به مربع مجموع آن ها است.

تحکیم درس: (7) دقیقه

مثال اول این درس را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

مراحل استقرایی ریاضی را از شاگردان بپرسید.

معلومات اضافی برای معلم

احکام ممکن است کلی و یا جزئی باشد.

طور مثال:احکام کُلی:

- درهر متوازی الاضلاع، اقطار یکدیگر را نصف می کنند.
- هر عددی که به صفر ختم شده باشد، بر عدد 5 قابل تقسیم می باشد.

احکام جزئی یا خاص متناظر با نمونه های فوق چنین است:

- در متوازی الاضلاع ABCD اقطار یکدیگر را تنصیف می کند.
- عدد 140 بر 5 قابل تقسیم می باشد.

از حکم کلی به طرف حکم جزئی رفتن را قیاس می گویند.

وقتی که از احکام جزئی به احکام کلی برسیم، روش نتیجه گیری را استقرا می گویند.

سؤال دراین است که در ریاضی استقرأ چگونه به کار برده شود تا نتیجهٔ درست به دست آید.

طور مثال: اگر ترینوم $x^2 + x + 41$ را در نظر بگیریم که توجه لئوناردیولر را نیز جلب کرده بود. در این سه حده

اگر $x=0$ باشد عدد اول 41 به دست می آید. اگر $x=1$ باشد بازهم عدد اول 43 به دست می آید. اگر این کار را ادامه دهیم و به عوض x قیمت های 2،3،4،5،6،7،8،9 و 10 را عوض کنیم ، اعداد اولیه (Prime Numbers) 47،71،61،53، 97،83، 113، 131 و 151 به دست می آید.

حالا اگر حکم شود که در این سه حده هر عدد صحیح غیر منفی قرار داده شود همیشه عدد اول است در حالیکه این حکم درست نمی باشد؛ پس عدم صحت در کجا است؟

تا $x=39$ عدد اول می شود. اما برای $x=40$ عدد $(41)^2$ یک عدد غیر اول به دست می آید که $(41^2+40+41)$ بر 41 قابل تقسیم می باشد.

یا به طور مثال عدد $A=2^{2^n}+1$ را در نظر میگریم این عدد به مقادیر $n=0,1,2,3,4$ چنین می باشد:

$n=0 \Rightarrow A=2^{2^0}+1=3$ $\qquad$ $n=1 \Rightarrow A=2^{2^1}+1=5$

$n=2 \Rightarrow A=2^{2^2}+1=17$ $\qquad$ $n=3 \Rightarrow A=2^{2^3}+1=257$

$n=4 \Rightarrow A=2^{2^4}+1=65537$

که تماماً اعداد اول می باشند. که عالم ریاضی فرانسوی فرما در قرن هفدهم گمان میکرد.

که این عدد به هر قیمت n عدد اول می باشد، اما در قرن هجدهم یولرثابت کرد که این عدد برای n=5 عدد غیر اول می باشد. $n=5 \Rightarrow A=2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$ که عدد اول نمی باشد.

یا در قرن هفدهم ریاضی دان جرمنی لیپ نیتنر ثابت کرد که برای همه قیمت های صحیح و مثبت n عدد n^3-n بر 3 و عدد n^5-n بر 5 و عدد n^7-n بر 7 قابل تقسیم می باشد، او تصور می کرد که برای هر قیمت طاق K و برای هر قیمت صحیح و مثبت n عدد n^k-n بر K قابل تقسیم می باشد؛ ولی خودش متوجه شد که $2^9-2=510$ بر 9 قابل تقسیم نمی باشد.

نتیجه: یک حکم ریاضی ممکن است در بسیاری موارد خاص درست؛ ولی در عین حال در حالت کلی نادرست باشد؛ پس چگونه مسایل را می توان با روش استدلال خاصی که به استقرأ ریاضی (یا ستقرأ کامل) مشهور است، حل کرد؛ پس چگونه می توان این حکم را در حالت کلی تایید کرد؟

بسیاری از این گونه مسایل را می توانیم با روش استدال خاصی که به استقرأ ریاضی یا (استقرأ کامل) مشهور است حل کرد. اساس این روش براصل استقرأ ریاضی قرار دارد، این اصل چنین است:

یک حکم برای هر مقدار عدد طبیعی n درست است وقتی که:

1- برای n=1 درست باشد.

2- از قبول صحت حکم برای عدد اختیاری مثل n=K بتوانیم نتیجه بگیریم که این حکم برای n=k+1 نیز درست می باشد؛ طور مثال: نشان دهید که:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$s_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

با فرض این که رابطه فوق برای n=k صحت داشته باشد یعنی:

$$s_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

که k یک عدد اختیاری طبیعی می باشد. حالا صحت رابطۀ فوق را برای n=k+1 برسی می کنیم.

یا به عبارت دیگر میخواهیم نشان دهیم که: $s_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ می باشد.

در حقیقت $s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ است؛ پس داریم که:

$$s_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

حالا با اساس اصل استقرأ می توانیم حکم نماییم که رابطۀ $s_n = \frac{n}{n+1}$ برای همه اعداد طبیعی n درست می باشد.

بازهم دقت صورت گیرد که صحت تمام رابطه ها برای تمام اعداد طبیعی درست نمی باشد؛ طور مثال:

$17+2=19$

$19+4=23$

$23+6=29$

$29+8=37$

$37+10=47$

از عدد اول (17) شروع کرده بودیم با عدد 17 اولین عدد جفت (2) جمع گردیده در نتیجه عدد اول (19) به دست آمد با عدد اول 19 عدد دوم جفت (4) جمع شد بازهم عدد اول (23) به دست آمد. عدد 23 را با سومین عدد جفت (6) جمع کردیم عدد اول (29) به دست آمد. آیا با این پنج نتیجه می توانیم ، بگویم قانونی را کشف کرده ایم ؟ آیا اگر این روش را تعقیب کنیم همیشه عدد اول به دست می آید؟

$47+12=59$

$59+14=73$

$73+16=89$

$89+18=107$

$107+20=127$

- بازهم مشاهده می شود که تمام اعداد به دست آمده اعداد اولیه (Prime Numbers) می باشند.

$127+22=149$

$149+24=173$

$173+26=199$

$199+28=227$

$227+30=257$

اما آزمایش شانزدهم صدق نمی کند $289=32+257$ که 289 یک عدد اول نمی باشد؛ زیرا: $17\cdot17=289$ می باشد.

یک قانون نیست اگر ازمایش را ادامه دهیم از این به بعد گاهی عدد اول و گاهی عدد مرکب به دست می آید

(عدد اول) $323+36=359$

(عدد مرکب) $289+34=323=17\cdot19$

(عدد مرکب) $397+40=437=19\cdot23$

(عدد اول) $359+38=397$

(عدد اول) $437+42=479$

(عدد اول) $479+44=523$

حدس ما درست نبوده و در مورد قانون کلی موجود نیست.

از زمان های قدیم، نظریه استقرأ وجود داشت و از آن استفاده می شد؛ اما اثبات به کمک استقرأ از اوایل قرن شانزدهم میلادی رایج گردید. در قرن هفدهم فرما ریاضی دان مشهور، استفاده از استقرأ را مطرح ساخت؛ اما اصطلاح (استقرأیی ریاضی) در اوایل قرن نوزدهم توسط (دُمِرگان) ریاضی دان انگلیسی به کار رفت و روش استقرأ در اثبات های ریاضی مورد استفاده قرار گرفت.

استقرای تعمیم یافته:

در مثال های که تا اکنون تذکر داده شد، استقرای ریاضی از $n=1$ شروع گردیده بود، اما بعضی اوقات لازم می باشد، که مرحلهٔ اول استقرا را از یک عدد طبیعی $n>1$ شروع نماییم.

طور مثال: ثابت کنید رابطه $n!>3^n$ برای $n\geq7$ مناسب می باشد.

عدد طبیعی مناسب مانند $m>1$ وجود دارد طوری که برای هرعدد طبیعی n $(n\geq m)$ داریم که: $n!>3^n$

حل: نخست جستجو می کنیم که n به چی اندازه بزرگ باشد.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561

مشاهده می شود که برای $n<7$ اصلاً این حکم درست نیست؛ اما برای $n=7$ رابطه $n!>3^n$ درست می باشد. و برای n های بزرگتر از 7 نیز این رابطه درست است. حال فرض می کنیم برای $k\geq7$ حکم درست است. یعنی $k!\geq3^k$ می باشد.

حالا صحت بودن حکم زیر را تحقیق می کنیم:

$(k+1)!>3^{k+1}$

زیرا اگر اطراف رابطه $k!>3^k$ در $(k+1)$ ضرب شود نتیجه می شود:

$$(k+1)k! > (k+1)3^k$$

چون $k \geq 7$ فرض شده است پس:

$$(k+1)k! > 7 \cdot 3^k$$

و از اینجا داریم که:

$$7 \cdot 3^k > 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$$
$$7 \cdot 3^k > 3^{k+1}$$

طبق تعریف $(k+1)k! > (k+1)!$ می باشد اگر در رابطه فوق وضع شود داریم که:

$$(k+1)! > 3^{k+1}$$

بدین ترتیب برای $k \geq 7$ نشان دادیم که اگر $k!>3^k$ باشد؛ پس $(k+1)! > 3^{k+1}$ می باشد.

حال با اطمینان می توانیم بگوییم که برای هر $n \geq 7$ ، $n! > 3^n$ درست می باشد.

در این مثال مشاهده شد که m مناسب عدد 7 است. چنین شیوه استدلالی را روش استقرایی تعمیم یافته می گویند.

اصل استقرایی تعمیم یافته:

فرض کنید $P(n)$ حکمی در بارهٔ عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m>1$ درست باشد و از صحت $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ صحت $P(k+1)$ نتیجه شود؛ پس $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ صحت دارد. (متوجه باشید در هر مسأله عدد مناسب m را دریابید)

مراحل اسقرایی تعمیم یافته:

1- m مناسب را به دست می آوریم.

2 – صحت حکم را با $n = m$ نشان میدهیم.

3- ثابت میکنیم که اگر حکم برای $n = k \geq m$ صحت داشته باشد، در آن صورت حکم برای $n = k+1$ نیز درست می باشد. و نتیجه می شود. که حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

حل تمرین:

1. توسط استقرای ریاضی نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

استاد محترم متوجه باشید که در نوشتن ا ین فرمول در کتاب درسی اشتباه صورت گرفته است.

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

که ذریعهٔ استقرای ریاضی به طور ذیل ثبوت می گردد: مرحله 1:

$$n=1 \quad : \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$$

صحت دارد.

مر حلهٔ 2: فرض می نمایم که برای n=k صحت دارد.

$n = k$ $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

مرحلۀ 3: برای n=k+1 ثبوت می کنیم:

$$1^2 + 2^2 + ...k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

2. توسط استقرای ریاضی نشان دهید که:

$$2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2 \qquad (i)$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (ii)$$

حل جزء i

1- صحت دارد $n = 1 \qquad 2 \cdot 1^2 = 2$

2- برای $n = k$ فرض میکنیم که رابطۀ داده شده صحت دارد.

$$2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) = 2k^2$$

3- برای $n = k + 1$ ثبوت می کنیم که رابطه صحت دارد:

$$2 + 6 + 10 + ... + 4k - 2 + 4(k+1) - 2 = 2(k+1)^2$$

$$2k^2 + 4(k+1) - 2 = 2k^2 + 4k + 4 - 2 = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^2$$

ثبوت شد که رابطۀ فوق $n = k + 1$ صحت دارد؛ پس رابطه برای تمام اعداد طبیعی صحت دارد.

حل 1: رابطه برای $n = 1$ صحت دارد.

$$n = 1 \qquad \Rightarrow 1^2 = 1$$

2- برای $n = k$ فرض میکنیم که رابطۀ صحت دارد:

$$n = k \Rightarrow 1 + 3 + ... + (2k - 1) = k^2$$

برای $n = k + 1$ ثبوت می کنیم که صحت دارد یعنی:

ثبوت:

$$1 + 3 + ... + 2k - 1 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$$

$$k^2 + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$



استدلال استنتاجی

صفحهٔ کتاب: (401) **وقت تدریس (1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• بفهمند که استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن ها را پذیرفته ایم. • درک کنند که در حقیقت روشی که نتیجه گیری و یا ثبوت ان با استفاده از مطالبی که صحت ان ها نشان داده شده باشد و یا حقایقی که صحت آن ها را داشته باشیم، مطمئن هستیم که نتیجه از آن همیشه درست بوده عبارت از استدلال استنتاجی می باشد. • درک کنند که وقتی از استدلال استنتاجی استفاده میکنیم مطمئن باشیم که نتیجه همیشه درست است یا صحت بودن یک نتیجه گیری کلی توسط استدلال استنتاجی ثبوت می شود. • درک کنند که قضایای کلی احکامی هستند که همیشه برقرار می باشد.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و ...
مواد درسی و ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی ، سؤال ورودی را جهت خلق انگیزه از شاگردان بپرسید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت این درس را شاگردان در گروپ ها اجرا کنند و استاد محترم آنها را همکاری و رهنمایی کند و به شاگردان توضیح دهد که با استفاده از حقایقی که صحت آن را در قدم اول قبول کردیم نتیجهٔ عمومی را به دست می آوریم که این روش را به نام استدلال استنتاجی یاد میکنند بعد مثال درس را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

یک مثال دیگری را نیز مثل جدول زیر کار کنید.

عدد را انتخاب کنید	4	7	12	35
با آن عدد 5 را جمع کنید	9	12	17	40
نتیجه را دو چند کنید	18	24	34	80
از ان 4 را تفریق کنید	14	20	30	76
بر عدد 2 تقسیم کنید	7	10	15	38
عدد انتخاب شده را از این نتیجه تفریق کنید	3	3	3	3

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس سؤال ذیل را حل کنید.

1- نشان دهید که حاصل جمع دو عدد طاق همیشه عدد جفت می باشد.

حل: فرض کنید که $2m+1$ و $2n+1$ دوعدد طاق باشد که m و n دو عدد طبیعی می باشند.

$(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2=2(m+n+1)$

به دلیل که (2) مضرب آن است؛ پس عدد $2(m+n+1)$ یک عدد جفت می باشد.

این کار نشان دهندهٔ قدرت استدلال استنتاجی می باشد.

ارزیابی ختم درس: (5) دقیقه

سؤال دوم تمرین را از شاگردان بپرسید؟

معلومات اضافی برای معلم

در مقدمه (پاپیروس رایند) که شاید قدیم ترین تاریخ موجود ریاضی باشد (1650 سال قبل از میلاد) چنین آمده است:

با جرأت می توان گفت: "که بارزترین مشخصهٔ شعور انسان که نشان دهنده درجه تمدن هر ملت است، همان قدرت استدلال کردن است و به طور کلی این قدرت می تواند درمهارت های ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود."

یکی از مسایلی که در تاریخ ریاضی مصر در (پاپیروس رایند) موجود است یک سرگرمی به صورت بازی با اعداد است. با توجه به دستورالعمل های مسأله، عددی انتخاب میشود؛ سپس چندین عملیه دیگرروی آن انجام میشود. در اخر بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یک چیز میباشد.

طور مثال: اگر مثال اول این درس را به جای اعداد علامت گذاری نماییم به عوض عدد انتخابی شکل مربع را در نظر می گیریم و بالای آن مراحل مثال اول را تطبیق می نماییم و برای جمع یا تفریق کردن از یک دایرهٔ کوچک استفاده میکنیم.

عدد انتخابی	□
5 را علاوه میکنم	□ OOOOO
دوچند نتیجهٔ قبل	□ OOOOO □ OOOOO
کم کردن 4 واحد	□ OOO □ OOO
نصف نتیجهٔ قبل	□ OOO
کم کردن عدد انتخاب شده	OOO

حال مثال را به شکل الجبری یعنی به عوض اعداد از حروف کار میگریم به عوض عدد انتخابی یک حرف را در نظر میگریم:

عدد انتخابی	n
عدد انتخابی با جمع 5	n+5
دوچند نتیجه قبلی	2n+10
کم کردن 4 واحد	2n+6
نصف نتیجه قبل	n+3
کم کردن عدد انتخاب شده	3

در هر سه حالت به نظر میرسد که نتایجی را بر اساس عباراتی که صحت آن ها را قبول کرده ایم به دست آوردیم. یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

وقتی که از استدلال استنتاجی استفاده میکنیم، مطمین هستیم که نتیجه همیشه درست است

هدف از مثال های فوق، ایجاد زمینه یی مناسب برای آشنایی با مفهوم استدلال استنتاجی بود. بیشتراین مثال ها نمونه هایی از قضایای کلی اند.

قضایای کلی احکامی اند که همیشه بر قرار می باشند. اکثر قضیه های مهم ریاضی قضایای کلی هستند. به طور مثال، اهمیت قضیه فیثاغورث در این نیست که دریک مثلث قایم الزاویه صدق می کند؛ بلکه این قضیه برای همه مثلث های قایم الزاویه درست است و یا اهمیت مساوات $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ در این است که x هر زاویه که باشد، این مساوات برقرار است. و یا برای هر دو عدد حقیقی مثبت x,y داریم که:

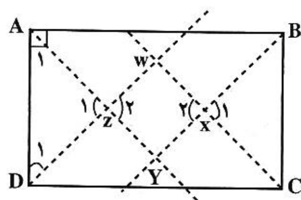
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

به طور خلص استدلال استنتاجی به ما اطمینان می دهد که نتیجهٔ به دست آمده حتماً درست است. این جامعیت ، یکی از نشانه های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال می باشد.

مثال دوم:

شکل که در نتیجهٔ تقاطع ناصف الزاویه های داخلی هر مستطیل به وجود می آید، مربع می باشد.

مستطیل اختیاری ABCD را در نظر می گیریم و ناصف الزاویه های داخلی آن را رسم می کنیم.



1- AY ناصف الزاویه A است و زاویهٔ A قایمه می باشد؛ پس: $\hat{A}_1 = 45^\circ$

DW ناصف الزاویه D است و زاویه D قایمه می باشد؛ پس: $\hat{D}_1 = 45^\circ$

بنابر این مثلث AZD متساوی الساقین است و زاویهٔ Z قایمه می باشد. در نتیجه:

$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = 90^\circ$

$AZ = DZ$……………….I

2- با استدلال شماره (1) نتیجه می شود که (BXC) مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین می باشد.

$\hat{X}_1 = \hat{X}_2 = 90^\circ$

$BX = CX$..................II

با توجه با رابطه های Iو II و از مستطیل ABCD نتیجه گرفته می شود که دو مثلث ADZ و BXC انطباق پذیر اند؛ بنابر آن $DZ = CX$

با استدلال مشابه شماره (1) نتیجه می شود که مثلث CWD نیز مثلث قایمه الزاویه متساوی الساقین می باشد.

$\hat{W} = 90^\circ$

$DW = CW$..................III

3- از رابطه های Iو II وIII داریم که چهار ضلعی WXYZ مستطیل است با توجه به رابطه های II و III می توانیم بنویسیم که:

$DW - DZ = CW - CX$

$WZ = WX$..................IV

رابطه IVنشان می دهد که WXYZ یک مربع است. در نتیجه در حالت کلی نشان دادیم که:

شکلی که از تقاطع ناصف الزاویه های داخلی هر مستطیل به وجود می آید مربع است.

در اثبات این مثال از حقایقی (حکم ها) استفاده کردیم که صحت آن را قبلا قبول کرده بودیم آن حکم ها عبارت اند از:

- مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180 درجه می باشد.
- مثلثی که دو زاویه آن مساوی باشد متساوی الساقین است.
- زاویه های متقابل بالرأس با هم مساوی اند.
- اگر از هر دو طر ف مساوات عین عدد کم شود در مساوات تغییر واقع نمی شود.

مثال فوق، نمونه از روش استدلال استنتاجی می باشد.

این نتیجه های کلی که همیشه درست اند نمونه های از قضیه ها می باشد. قضایای کلی احکامی اند که همیشه برقرار می باشند.

حل تمرین

1- نشان دهید که حاصل جمع دو عدد طاق همیشه یک عدد جفت است:

حل: میدانیم که برای هر عدد تام k عدد $2k+1$ یک عدد طاق است حال دو عدد طاق $2k_1+1$ و $2k_2+1$ را در نظر میگیریم که: k_1 و k_2 اعداد طبیعی اند.

$2k_1+1+2k_2+1 = 2k_1+2k_2+2 = 2(k_1+k_2+1)$

به دلیل وجود ضریب 2 در این مجموع نتیجه می گیریم که مجموع دو عدد طاق هروقت یک عدد جفت است.

2- ثابت کنید که هر عدد صحیح طاق به صورت $2k+1$ است.

حل:

$k=1 \quad : \quad 2k+1=2\cdot 1+1=3$

$k=n \quad : \quad 2n+1$

$k=n+1 \quad : \quad 2k+1=2(n+1)+1=2n+2+1=2n+3$

3- در بین 9 عدد سکۀ طلایی یکی آن تقلبی است که وزن آن از سکه های دیگر کمتر است چگونه میتوان با دوبار وزن کردن توسط یک ترازوی دوپله یی بدون استفاده از اوزان دیگر سکۀ تقلبی را دریافت نماییم؟

حل: سکه ها را در سه دسته تقسیم می نماییم دو دسته را توسط ترازو پله یی وزن می کنیم اگر پله ها باهم برابر بودند سکه تقلبی در دسته دیگری می باشد و اگر برابر نبودند پله‌ی ترازو که سبک است سکه تقبلی در همان پله می باشد.

بعد از سه سکه دو آن را در دو پله ترازو می گذاریم اگر پله ها برابر شدند سومی تقلبی می باشد. و اگر وزن های آن ها برابر نبودند واضح است هر پله که سبک است همان سکه تقلبی است.



استدلال مثال نقض

صفحهٔ کتاب: (403) **وقت تدریس (1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• شاگردان بیاموزند مثالی که نشان دهنده این است که نتیجه گیری کُلی نادرست می باشد به نام مثال نقض یاد می شود. • درک کنند مثالی را که یک حکم یا یک عبارت را نقض کند به نام مثال نقض یاد میشود. • تفکیک کرده بتوانند که برای تمام مفاهیم مثال نقض وجود ندارد.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و ...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی غرض خلق انگیزه سؤال ورودی را از شاگردان بپرسید.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه:

فعالیت درس را شاگردان در گروپ های مناسب اجرا کنند و استاد محترم آن ها را همکاری و راهنمایی کند.

$9=2+3+4$

$15=1+2+3+4+5$

$22=4+5+6+7$

$39=12+13+14$

$74=17+18+19+20$

حال این سؤال مطرح میشود که آیا هر عدد طبیعی را میتوان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت؟

و آیا می توانیم که تمام اعداد طبیعی را با چنین کیفتی کنترول کرد؟

یکی از طریقه های آن این است که عدد طبیعی را دریابیم که چنین خاصیتی نداشته باشد.

$12=3+4+5$

$17=8+9$

$26=5+6+7+8$

$30=9+10+11$

$40=6+7+8+9+10$

$100=18+19+20+21+22$

$130=31+32+33+34$

$6=1+2+3$

$7=3+4$

$8=?$

مشاهده می شود که عدد 8 را نمی توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

عدد 8 مثال نقضی است که نشان میدهد هر عدد طبیعی را نمی توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

مثال این درس را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

نمونه ذیل را در نظر گیرد.

$6=1^2+1^2+2^2$

$14=1^2+1^2+3^2$

$24=2^2+2^2+4^2$

$59=1^2+3^2+7^2$

$61=3^2+4^2+6^2$

$89=2^2+2^2+9^2$

نتیجهٔ احتمالی آن است که: هر عدد طبیعی را می توانیم به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه گیری فوق غلط است.

چون اعداد اولیه مثل 17 ، 19، 23 و غیره را نمی توانیم که به شکل مربع کامل اعداد اولیه بنویسیم که این یک مثال نقض می باشد.

برای کدام یک از احکام زیر مثال نقض وجود دارد؟

a) اگر $x>1$ باشد؛ پس $x>2$ می باشد.

b) اگر $x>2$ باشد؛ پس $x>1$ می باشد.

c) اگر $ab=0$ باشد؛ پس $a=0$ و $b=0$ می باشد.

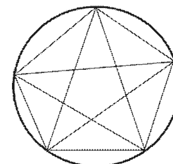
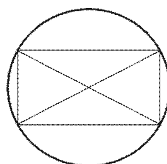
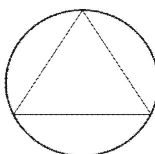
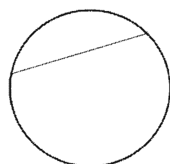
ارزیابی درس: (5) دقیقه

سؤال اول تمرین این درس ا ز شاگردان پرسیده شود.

معلومات اضافی برای معلم

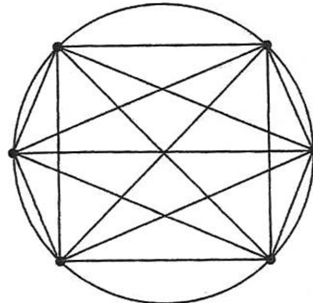
- اگر گفته شود که ارتفاعات یک مثلث در داخل مثلث در یک نقطه متقاطع اند. برای این بیان مثال نقض این این است که ارتفاعات مثلث که اضلاع آن 6،8 و 12 باشد در داخل مثلث قطع نمی کند. که این مثلث خاص نقض برای حدس ما می باشد.
- دو نقطهٔ کیفی بالای محیط دایره را توسط یک قطعه خط وصل کنید.

دایره را به دو حصه تقسیم می کند. با اتصال سه نقطهٔ اختیاری بالای محیط دایره، دایره را به 4 حصه تقسیم می کند ، شکل ذیل این موضوع را برای 2،3،4 و 5 نقطه کیفی بالای محیط دایره نشان میدهد.

تعداد نقاط	2	3	4	5
تعداد ناحیه ها	2	4	8	16

از این نتیجه گرفته میشود؛ اگر تعداد نقاط 6 باشد باید دایرهٔ به 32 حصه تقسیم گردد و این نادرست است شکل ذیل را مشاهده کنید که توسط وصل کردن 6 نقطه بالای محیط دایره، دایره به 30 قسمت تقسیم می شود.
این مثال بود که حدس ما را نادرست کرد؛پس می گویم که با مثال نقض
نادرستی حدس ما ثابت شده است .



حل تمرین:

1- با استفاده از مثال نقض نشان دهید که «مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر است»

حل:

$-2 \in IR$ $\quad$ $(-2)^2 > (-2)^3$ یا $4 > -8$

به ملاحظه میرسد که مکعب هر عدد حقیقی از مربع آن بزرگتر نمی باشد.

2- برای کدام بیان زیر مثال نقض وجود ندارد:

a) مجموع دو عدد ناطق، عدد ناطق است.

b) مربع هر عدد مثبت، بزرگتر از خود عدد است.

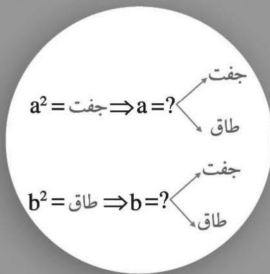
c) دو زاویه که اضلاع متناظر شان موازی است، باهم برابر اند.

d) مجموع دو عدد طاق عدد جفت است.

e) حاصل ضرب دو عدد غیر ناطق، عدد غیرناطق نیست.

برای کدام یک از d، c,b,a و e مثال های نقض وجود ندارد؟

حل: برای c,a و d مثال نقض وجود ندارد و برای b و e مثال های نقض وجود دارد؛ زیرا که $1^2 = 1$ و $\sqrt{6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ که یک عدد غیرناطق می باشد.



برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم

صفحهٔ کتاب: (405) **وقت تدریس (1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• مفهوم برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم را بدانند و مراحل برهان خلف را بشناسند. • درک کنند که در این نوع ثبوت فرض می شود که حکم قضیه درست نمی باشد و از روش استنتاج به یک تناقض می رسیم. • بدانند که از روش برهان خلف (ثبوت غیر مستقیم) در هندسه غرض ثبوت قضایا استفاده می شود. • در اثبات مسایل هندسی از ثبوت غیر مستقیم استفاده کرده بتوانند و اهمیت آن را درک کنند.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و...
مواد درسی و مواد ممد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی غرض خلق انگیزه سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. جواب آن این است که اگر مربع عدد جفت باشد ضرور عدد نیز جفت می باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

استاد محترم این فعالیت را حل کند.

حل فعالیت طور ذیل می باشد:

AD ناصف الزاویه $\hat{A}$ می باشد اگر $BD \neq CD$ باشد

ثابت کنید که $AB \neq AC$ می باشد.

حل: اثبات را از طریق برهان خلف انجام میدهیم. فرض کنید نتیجه مطلوب یعنی $AB \neq AC$ درست نباشد یعنی $AB = AC$ باشد.

بنابر این مثلث ABC متساوی الساقین است.

چون در مثلث متساوی الساقین ناصف الزاویه AD ضلع BC را نیز نصف می کند؛ پس BD=DC می شود که این با فرض مسأله $BD \neq CD$ در تضاد است در نتیجه $AB \neq AC$

این روش استدلال را به نام برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم یاد میکنند. که در تمام ریاضیات موارد استعمال دارد.

نتیجه فعالیت را به شاگردان توضیح کنید. و بعد مراحل استفاده از برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم را نیز واضح سازید. مثال درس را با سهم گیری شاگردان حل کنید.

تحکیم درس: (7) دقیقه

غرض تحکیم درس این سؤال را حل کنید.

اگر n یک عدد تام باشد و n^2 طاق باشد، توسط برهان خلف نشان دهید که n نیز طاق می باشد.

ارزیابی درس: (5) دقیقه

غرض ارزیابی این سؤال را بپرسید.

اگر n^2 مضرب عدد 3 باشد نشان دهید که n نیز مضرب عدد 3 می باشد.

معلومات اضافی برای معلم

نشان دهید که $\sqrt{2}$ عدد غیر ناطق یا عدد گنگ می باشد.

ثبوت: فرض می کنیم که $\sqrt{2}$ یک عدد ناطق (گویا) باشد؛ پس می توان نظر به تعریف عدد ناطق:

$$\sqrt{2}=\frac{P}{q} \quad (q\neq 0)$$

که P و q اعداد تام بوده و شکل کسر $\frac{P}{q}$ به ساده ترین صورت می باشد. یعنی p و q نسبت باهم اول اند.

$$\sqrt{2}=\frac{P}{q} \quad \Rightarrow 2=\frac{P^2}{q^2}\Rightarrow 2q^2=p^2$$

از این جا نتیجه گرفته می شود که P^2 عدد جفت است و در نتیجه P نیز جفت می باشد.

یعنی $P=2k$ است $P^2=4k^2$

به عوض P^2 قیمت آن $2q^2$ را عوض می نماییم داریم که: $2q^2=4k^2$

اطراف را برعدد (2) تقسیم می کنیم $q^2=2k^2$

از این جا نتیجه گرفته می شود که q^2 جفت است و در نتیجه q نیز جفت می باشد.

و این خلاف فرض است؛ زیرا در این صورت P و q هر دو مضرب های 2 می باشد و بر 2 قابل تقسیم است.

در نتیجه فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ نا درست بوده؛ پس $\sqrt{2}$ یک عدد غیر ناطق (گنگ) می باشد.

به همین ترتیب می توانید به اثبات برسانید که عدد $\sqrt{3}$ نیز عدد غیر ناطق یا عدد گنگ می باشد.

- نشان دهید که حاصل جمع دو عدد مسلسل طاق بالای عدد 4 پوره تقسیم می گردد.

حل: فرض کنید دو عدد مسلسل طاق $2k+1$ و $2k+3$ باشد.

$$2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$$

واضح است که بر 4 قابلیت تقسیم دارد.

- نشان دهید که $\sqrt[3]{5}$ یک عدد غیر ناطق می باشد.

حل: فرض می کنیم که $\sqrt[3]{5}$ یک ناطق است؛ پس:

$$\sqrt[3]{5}=\frac{p}{q} \qquad (q\neq 0)$$

- در صورتی که بزرگترین قاسم مشترک اعداد تام p و q عدد 1 باشد در نتیجه بزرگترین قاسم مشترک p^3 و q^3 نیز عدد 1 می باشد.

$$5=\frac{p^3}{q^3}\Rightarrow p^3=5q^3$$

که این امکان ندارد زیرا که بزرگترین قاسم مشترک اعداد p و q لوی عدد 1 می باشد در نتیجه $\sqrt[3]{5}$ یو یک عدد غیر ناطق است.

حل تمرین

نشان دهید که $\sqrt{3}$ یک عدد غیر ناطق است.

حل: فرض می کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد یعنی $\sqrt{3}$ غیر ناطق نباشد؛ بلکه ناطق باشد پس عدد $\sqrt{3}$ را به صورت $\frac{p}{q}$ می نویسیم که در آن p و q اعداد تام و $q\neq 0$ است .

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\Rightarrow 3=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow 3q^2=p^2$$

چون pو q عددتام بوده و بزگترین قاسم مشترک آن ها عدد 1 است.

از $3q^2=p^2$ نتیجه گرفته می شود که p^2به 3 قابل تقسیم می باشد.

چون اگر ab قابل تقسیم به c باشد؛ پس b هم بالای c و a هم بالای c قابل تقسیم می باشد.

در نتیجه چون $p\cdot p$ یا p^2 بالای عدد 3 قابلیت تقسیم دارد؛ پس p نیز بالای عدد 3 قابل تقسیم می باشد.

در نتیجه یک عدد تام k وجود دارد که $p=3k$ شود؛ پس نشان داده شد که $\sqrt{3}$ یک عدد غیر ناطق می باشد.



منطق ریاضی و استنتاج بیان

صفحۀ کتاب: (407) **وقت تدریس (1 ساعت درسی)**

اهداف آموزشی - دانشی - مهارتی - ذهنیتی	• بیان و نفی یک بیان را بشناسند. • جدول صحت بیانیه و نفی بیانیه را ترتیب کرده بتواند. • بیان های شرطیه یک طرفه و دو طرفه را بشناسند و جدول های صحت آن ها را ترتیب کرده بتوانند. • جدول صحت ترکیب بیان ها را ترتیب کرده بتوانند. • در حل مسایل منطق ریاضی از آن استفاده کرده بتوانند و اهمیت آنر بدانند.
روش های تدریس	سؤال و جواب ، کار های انفرادی، گروپی و ...
مـــواد درســـی و ممـــد درسی	کتاب درسی، تخته، چارت، اشکال و...
توضیح ورودی (5) دقیقه	بعد از فعالیت های مقدماتی سؤال ورودی از شاگردان پرسیده شود. هدف آن ا ین است که (بیان) احتمال دارد درست و یا نادرست باشد.

فعالیت جریان درس: (28) دقیقه

فعالیت صفحه 407 را شاگردان حل کنند و استاد محترم آنها را همکاری کند و نتیجۀ آن که هر جمله نمی تواند یک بیان باشد به شاگردان توضیح گردد بعد بیان و نفی (نقیض) بیان با جدول صحت به شاگردان توضیح گردد.

همچنان ترکیب بیان ها و ترکیب های مشروط یکطرفه و دو طرفه نیز توضیح شود.

مثال های اول و دوم با سهم گیری شاگردان حل گردد.

تحکیم درس: (7) دقیقه

حل سؤال زیر را به شاگردان توضیح کنید.

اگر بیان p نادرست و بیان q درست باشد آیا ترکیب بیان های $p \vee q$ و $p \wedge q$ درست است یا نادرست؟

جواب: بیان $p \wedge q$ نادرست و بیان $p \vee q$ درست می باشد.

ارزیابی درس: (5) دقیقه:

اگر بیان اول p درست و بیان q نادرست باشد $p \Rightarrow q$ درست است یا نادرست؟

جواب: $p \Rightarrow q$ نادرست می باشد.

معلومات اضافی برای معلم

منطق علامتی (symbolic Logic):

علامت (~) خوانده می شود که (نه) (P~نفی P) Not p یا Negative of p

اگر p یک بیان باشدP~ را نقیض P می گویند؛ طور مثال اگر P بیانی باشد که 5 طاق است نقیض یا نفی آن این

است که (چنین نیست که 5 طاق است) یا $(1=2)\sim$ چنین نیست که 1 مساوی 2 است.

علامت $(\wedge)$ به مفهوم (و) $(p \wedge q$ یعنی p و q)

علامت $(\vee)$ به مفهوم (یا) $(p \vee q$ یعنی p یا q)

$p \Rightarrow q$ اگر P پس q یا از p، q نتیجه گرفته می شود که به نام ترکیب مشروط یک طرفه یاد می شود.

یادداشت: رابطه های بیان ها توسط الفاظ (چنین نیست که، و ، یا، اگر) صورت می گیرد.

$p \Leftrightarrow q$ ترکیب مشروط دو طرفه می باشد ((p اگر و تنها اگر q)) if and only if خوانده می شود یا (p معادل به q است)

جدول صحت و توضیح استعمال سمبول ها: اگر p یک بیان باشد (~P) نفی (Negation of P) یا چنین نیست بیان p می باشد. اگر p درست باشد ~p نادرست است و اگر p نادرست باشد ~p درست است.

جدول صحت(Truth Table) آن قرار زیر است:

p	$\sim p$
T	F
F	T

1- ترکیب $p \wedge q$ (Conjunction) در صورتی درست است که هر دو مولفهٔ بیان درست باشد.

طور مثال $a < b \wedge b < c$ یعنی a کوچکتر از b است و b کوچکتر از c می باشد که جدول صحت آن قرار زیر است

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال 1:

(i)کابل مرکز افغانستان و تهران مرکز ایران است.

(ii) $4<5 \wedge 8<10$ (iii) $4<5 \wedge 8>10$ (iv) $2+2=3 \wedge 6+6=10$

مشاهده می شود که (i) و (ii) درست است؛ اما (iii) و (iv) نادرست می باشد.

2- ترکیب $p \vee q$ (disjunction): در صورتی درست می باشد که حد اقل یکی از آنها p یا q درست باشد و در صورتی نادرست می باشد که هر دو آن نادرست باشد. جدول صحت آن طور زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

طور مثال: در بیانه های زیر فقط بیان چهارم نادرست است.

5 تاق است یا برف سفید است.

5 تاق است یا برف سیاه است.

5 جفت است یا برف سفید است.

5 جفت است یا برف سیاه است.

مثال2: 10 عدد تام مثبت است یا $\sqrt{2}$ یک عدد ناطق می باشد؛ چون بیان اول درست است؛ پس $p \vee q$ درست می با شد.

مثال3: یک مثلث دو زاویه قایمه دارد یا کندهار مرکز افغانستان است؛ چون هر دو بیان نادرست است پس $p \vee q$ نیز نادرست می باشد.

$a < b \vee a = b$

a کوچکتر از b است یا a مساوی b است.

$\sim (a < b) \vee a = b$

a کوچکتر از b نیست یا a مساوی b است.

$a < b \vee \sim (a = b)$

a کوچکتر از b است یا a مساوی b نیست.

$\sim (a < b \vee a = b)$

چنین نیست که a کوچکتر از b است یا a مساوی به b است.

و $p \vee q \vee r$ را به شکل $(p \vee q) \vee r$ می نویسیم.

ترکیب شرطی(Implication or Conditional): که به $p \Rightarrow q$ نشان داده می شود

از p،q نتیجه می شود که p به نام فرضیه و q به نام نتیجه یاد می شود (اگر p انگاه q)

طور مثال: اگر α و β زوایای متقابل باالرأس باشند پس $\alpha = \beta$ است. یا اگر $a > 1$ انگاه $a^2 > 1$ می باشد.

بیان شرطی در صورتی نادرست می باشد که p درست و q نادرست باشد. در تمام حالات باقیمانده $p \Rightarrow q$ درست می باشد. که جدول صحت آن قرار زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال: در بیانیه های زیر فقط دومی نادرست می باشد.

اگر 5 طاق است 7 اول است.

اگر 5 طاق است 7 جفت است.

اگر 5 جفت است 7 اول است.

اگر 5 جفت است 7 جفت است.

و یا در بیان های زیر دوم نادرست است و متباقی درست می باشند.

اگر $2<3$ آنگاه $2>1$

اگر $2<3$ آنگاه $2<1$

اگر $2>3$ آنگاه $2>1$

اگر $2>3$ آنگاه $2<1$

مثال: احمد در کابل زنده گی می کند؛ پس احمد در افغانستان زنده گی می کند.

اگر بیان اول غلط باشد طور مثال اگر احمد در کابل زنده گی نمی کند؛ اما احمد در افغانستان زنده گی می کند.

هیچ دلیلی وجود ندارد که احمد در افغانستان زنده گی نمی کند؛ پس نمی توانیم ترکیب آن $p \Rightarrow q$ را نادرست بگوییم و اگر جمله قبلی و بعدی هر دو نادرست باشند مثال زیر توجه کنید:

مثال: احمد ادعا می کند که اگر او به حیث سر تیم بازی انتخاب شود؛ پس تیم برنده می شود. در این وقت چهار امکان وجود دارد:

1- احمد به حیث سر تیم انتخاب شد و تیم بازی را برد؛ پس بیان احمد درست است.
2- احمد به حیث سر تیم انتخاب شد و تیم بازی را باخت؛ پس بیان احمد نادرست است.
3- احمد به حیث سر تیم انتخاب نشد؛ اما تمام اعضای تیم بازی را برد؛ پس دلیل برای نادرست بودن بیان احمد وجود ندارد.
4- احمد به حیث سر تیم انتخاب نشد و تیم بازی را باخت در این صورت احمد مقصر نیست.

مثال: احمد در کابل زنده گی می کند؛ پس احمد در افغانستان زنده گی می کند.

این یک بیان درست می باشد؛ اما اگر احمد در کابل زنده گی نمی کند نمی توان گفت که احمد در افغانستان زنده گی نمی کند.

در این حالت $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد و دراین حالت $\sim q$ درست است و $\sim p$ نادرست است.

$p \Rightarrow q$ و $\sim(p\wedge \sim q)$ که هر دو آن در عین وقت درست می باشند که جدول صحت $\sim(p\wedge \sim q)$ قرار زیر است:

p	q	$\sim q$	$p\wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$ $\sim(p\wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
T	F	T	T	T

اگر به ستون آخری جدول متوجه شوید نتیجه $p \Rightarrow q$ و $\sim(p\wedge \sim q)$ هر دو عین چیز می باشد؛ پس هر دوی آن منطقاً با هم مساوی اند.

مثال: اگر عدد حقیقی x بزرگتر از 5 باشد آنگاه 4x بزرگتر از 20 است. $x>5 \Rightarrow 4x>20$

در هندسه اگر مثلث متساوی الساقین باشد زاویه های مقابل ساق ها با هم مساوی اند اینگونه قضیه ها را قضیه های شرطی می گویند که جمله اول را فرض قضیه و جمله دوم را حکم قضیه می گویند، کلمه های اگر و آنگاه نقش تعین کننده را در قضیه های شرطی دارند که حکم از فرضیه نتیجه می شود. اگر در یک بیان شرطی فرض درست ولی حکم نادرست باشد این بیان قضیه شرطی شده نمی تواند.

مثلا:

اگر $x > 0$ باشد آنگاه $x^2 > x$ است.

اگر $x = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه $x^2 = \frac{1}{4}$ می شود.

که در اینجا فرض $x > 0$ درست است؛ ولی حکم آن $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ نادرست است.

عکس $p \Rightarrow q$ عبارت از $q \Rightarrow p$ می باشد و عکس نقیض یک بیانیه شرطی، بیان است که جمله اول و دوم آن به ترتیب نقیض جمله دوم و نقیض جمله اول می باشد.

طور مثال:

اگر p آنگاه q $(p \Rightarrow q)$ عکس نقیض آن اگر $\sim q$ انگاه $\sim p$ (اگر چنین نیست که q انگاه چنین نیست که p)

عکس نقیض بیان

اگر a طاق است a+1 جفت است عبارت است از:

اگر a+1 جفت نیست a طاق نیست.

با کمی دقت می توانیم بگوییم که ارزش بیان شرطی با ارزش عکس نقیض آن برابر است.

بیان های دو شرطیه (Biconditional): $p \Leftrightarrow q$

بیانیه $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ به طور خلص به شکل $p \Leftrightarrow q$ نشان داده می شود.

(P iff q) که iff با مفهوم اگر و اگر نشان داده می شود.

یا در هندسه اگر عکس یک قضیهٔ شرطی نیز یک قضیه شرطی باشد چنین قضیه را قضیه دو شرطی می نامند مثل قضیهٔ فیثاغورث (مربع وتر مساوی به مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.)

اگر مثلث قایم الزوایه است را به p که فرض قضیه است و حکم قضیه (مربع وتر مساوی به مجموع مربع های دو ضلع دیگر است) را به q نشان دهیم.

قضیه فیثاغورث $p \Rightarrow q$

و عکس فضیه فیثاغورث $q \Rightarrow p$

چون هر دو درست اند؛ پس $p \Leftrightarrow q$ می باشد و گفته می شود که p معادل q است و می خوانیم p اگر و تنها اگر q مثلث قایم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع مساوی به مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد و یا عکس آن.

مثال: اگر a=b آنگاه 2a=2b و اگر 2a=2b انگاه a=b

یا بیان دو شرطیه را چنین می توانیم بنویسیم: (p فقط و فقط وقتی که q) یا علامت $\Leftrightarrow$ مبین شرط لازم و کافی می

خوانیم. ارزش بیان ترکیبی دو شرطیه فقط و فقط در آن صورت درست است که هر دو مولفهٔ آن هم ارزش باشند؛ زیرا $p \Leftrightarrow q$ در صورتی درست است که هردو درست و یا نادرست باشند؛ طور مثال در بیان های زیر اولی و چهارمی درست و دومی و سومی نادرست اند.

- اگر 5 طاق است برف سفید است و باالعکس
- اگر 5 طاق است برف سیاه است و باالعکس
- اگر 5 جفت است برف سفید است و باالعکس
- اگر 5 جفت است برف سیاه است و باالعکس

عکس نقیض بیان های دو شرطی

بنابر تعریف عکس نقیض $p \Leftrightarrow q$ عبارت از $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ می باشد. که مولفه های آن نقیض مولفه های بیان اولی می باشد.

مثلاً: عکس نقیض بیان $a = b \Leftrightarrow 2a = 2b$ بیان $\sim (a = b) \Leftrightarrow \sim (2a = 2b)$ می باشد و یا به عبارت دیگر $(a \neq b \Leftrightarrow 2a \neq 2b)$ می باشد. که می توانیم آن را چنین بیان کرد:

شرط لازم و کافی برای آن که a مساوی b نباشد آن است که 2a مساوی 2b نباشد. با کمی دقت معلوم می شود که عکس نقیض یک بیان دو شرطی با خود بیان هم ارزش است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

یعنی در صورتی بیان $p \Leftrightarrow q$ درست می باشد که هر دو بیان p و q درست و یا هردوی آن نادرست باشد.

بیانیه شرطیه با جملات شرطیه ارتباط دارد. اگر $p \Rightarrow q$ یک شرط داده شده باشد.

1- $q \Rightarrow p$ عکس $p \Rightarrow q$ می باشد.

2- $\sim p \Rightarrow \sim q$ نقیض $p \Rightarrow q$ می باشد.

3- $\sim q \Rightarrow \sim p$ (عکس نقیض) $p \Rightarrow q$ می باشد.

جدول صحت این شرطیه طبق زیر می باشد.

				Given Condition	*Convers*	*Inverse*	*Contra Positive*
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T

جدول فوق نشان می دهد:

1- بیانیه و عکس نقیض(contra positive) آن باهم معادل می باشند. ثبوت یک قضیه از ثبوت جمله متناقض آن ثبوت می شود.

2- بیانیه های عکس (Converse) و نقیض (Inverse) یک بیانیه با هم معادل اند.

مثال: بیانیه های عکس (Converse) و نقیض (Inverse) و عکس نقیض (Contra Positive) برای بیانیه های شرطیهٔ زیر بنویسید.

حل:

$\sim q \Rightarrow p = ?$

Conditional	*converse*	*inverse*	*contra Positive*
$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow p$
$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow q$
$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$

مثال2: جدول صحت برای بیانیهٔ داده شدهٔ زیر ترتیب کنید.

حل:

$(p \Rightarrow -p) \vee (p \Rightarrow q) = ?$

1:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow \sim p) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T

$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q = ?$

2:

P	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) = ?$

3:

P	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge \sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

حل تمرین:

1- با تشکیل جدول صحت نشان دهید که بیان $(p \Rightarrow q)v \sim (\sim pvq)$ همیشه درست است (توجه کنید که p و p ~ مستقل از هم نیستند).

حل:

p	q	~p	$p \Rightarrow q$	pvq	~pvq	~(-pvq)	$(p \Rightarrow q)v \sim (\sim pvq)$
T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T

2- با تشکیل جدول صحت نشان دهید که ارزش بیان های $(p \Rightarrow q)$ و $\sim (pvq)$ باهم مساوی اند یا خیر؟

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	pvq	~(pvq)
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

مشاهده می شود که بیان های $p \Rightarrow q$ و (pvq)~ باهم مساوی نیستند.

1- کدام یک از جواب های زیر به نظر شما درست است؟
الف) یکی از مشکلات روش استقرایی عبارت از وجود خطاها در مشاهدات است.
ب) یکی از روش های قوی استدلال ریاضی روش استقرایی می باشد.
ج) محدود بودن تعداد مشاهدات یکی از اشکالات روش استقرای ریاضی است.
د) جواب الف و ج درست است.
جواب: (د)
2- کدام یک از پاسخهای زیر نادرست است؟
الف) یکی از روش های بسیار قوی مسایل ریاضی است.
ب) ما را به احتمال وجود قانون مندی کلی در مسایل رهنمایی میکند.
ج) یکی از روش های حل مسایل غیر ریاضی است.
د) یکی از روش های حل مسایل ریاضی نیست.
حل: (الف)
3- کدام یک از پاسخهای زیر در مورد شهود درست است؟
الف) استفاده از شهود برای یک نتیجه گیری درست است.
ب) با استفاده از شهود نمی توان با اطمینان گفت که نتیجه گیری صد در صد است.
ج) با استفاده از شهود حدس های قطعی همراه با استدلال حتمی برای ثبوت می توان زد.
د) با استفاده از شهود حدس های قطعی همراه استدالال حتمی برای ثبوت می توان زد.
حل: جواب (ب)
4- کدام یک از جوابات زیر نادرست است.
الف) استدلال استقراریی از جز به کل رسیدن است.
ب) استدلال استقرایی از کل به جز رسیدن است.
ج) از استدلال استقرایی نمی توان به عنوان اثبات دقیق ریاضی استفاده کرد.
د) استدلال استقرایی نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه یی از مشاهدات محدود است.
حل: (ب).
5- بر اساس استدلال استنتاجی کدام یک از جوابات زیر نادرست است؟
الف) اگر برف ببارد زمین مرطوب می شود، زمین مرطوب است، بنابر این برف باریده است.
ب) تمام فارغان یک مکتب با کمپیوتر آشنا وریاضی را خوب می دانند ضمیر از مکتب مذکور فارغ شده است، بنابراین وی با کمپیوتر خوب آشنا و خوب ریاضی می داند.
ج) اگر چهار ضلعی مربع باشد، هر دو قطر آن باهم عمود اند، دو قطر یک چهار ضلعی بالای هم عمود اند؛ بنابر این چهار ضلعی مذکور مربع است.
د) مثلث متساوی الساقین دو ضلع باهم برابر دارد، هر مثلث با سه ضلع برابر متساوی الاضلاع است؛ بنابراین هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الساقین است.
حل: (الف).
6- با استفاده از استدلال قیاسی نشان دهید که برای هر زاویه حقیقی α صورت می گیرد:

$Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$

حل: نظر به قضیۀ فیثاغورث در یک مثلث قایم الزاویه چون مجموع مربعات دو ضلع قایم مساوی به مربع وتر می باشد؛ بنابرآن چون در دایره مثلثاتی دو ضلع قایم Sin و Cos زاویه و وتر در دایرۀ مثلثاتی مساوی به یک واحد است؛

بنابرآن برای هر زاویهٔ α داریم که: $Sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$ می باشد.

7- با استدلال استقرایی نشان دهید که حاصل جمع n عدد طاق متوالی مساوی n^2 است.

حل: ثبوت می کنیم که: $1+3+5+.........+(2n-1)=n^2$

1- رابطه برای $n=1$ صحت دارد.

2- اگر برای $n=k$ صحت آن را قبول کنیم که درست می باشد رابطه را برای $n=k+1$ به اثبات می رسانیم؛ بنابراین داریم.

$$1+3+........+(2k-1)+2(k+1)-1=(k+1)^2$$

$$\Rightarrow k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

چون رابطه برای $n=k+1$ درست است بنابر آن برای هر عدد طبیعی درست می باشد.

8- با استدلال استقرایی ریاضی نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n مساوات ذیل تحقق می یابد.

$$1+2+3+.......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

حل: برای $n=1$ داریم: $1=\frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1=1$

بنا بر آن رابطه برای $n=1$ صحیح بوده.

برای $n=k$ صحت آنرا قبول می کنیم و رابطه را برای $n=k+1$ به اثبات می رسانیم داریم که:

$$n=k+1 \qquad 1+2+3+..........+k+k+1=\frac{(k+1)[(K+1)+1]}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]=(k+1)\left[\frac{k+2}{2}\right]=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

چون رابطه برای $n=k+1$ نیز درست می باشد. پس برای هر عدد طبیعی n درست می باشد.

9- با استدلال استنتاجی ثبوت نمایید که حاصل جمع دو عدد جفت همیشه جفت است.

اگر $2k_1$ و $2k_2$ دو عدد جفت باشد.

یک عدد جفت می باشد $2k_1+2k_2=2(k_1+k_2)$

10- با یک مثال نشان دهید که افادهٔ $3+2^n$ برای هر عدد طبیعی همیشه یک عدد اولیه نیست.

حل: اگر $n=5$ باشد داریم که: $2^5+3=32+3=35$

که 35 یک عدد اولیه نیست؛ پس افادهٔ $3+2^n$ برای هر عدد طبیعی n همیشه عدد اول نیست.

11- با استدلال برهان خلف نشان دهید که اگر n یک عدد ثابت و اختیاری بر علاوهٔ n^2 طاق باشد پس n نیز طاق می باشد.

حل: به جای اثبات طاق بودن n می توانیم نشان دهیم که n نمی تواند جفت باشد. ابتدا فرض می کنیم که n جفت باشد یعنی: $n=2k$

که درینجا n یک عدد صحیح است در نتیجه داریم: $n^2=4k^2 \Rightarrow n^2=(2k)^2$

و این نشان دهندهٔ آن است که n^2 جفت است و این یک تناقص با فرضیهٔ ما می باشد که فرض جفت بودن n نادرست است؛ پس n باید طاق باشد.

12- جدول صحت را برای بیان مرکب (باران می بارد و ابر نیست؛ پس باران نمی بارد.) تشکیل نمایید در صورتیکه بیان (α = باران می بارد)، (β ابر است) نامگذاری شده باشد؟ عدد 1 را برای صحیح و 0 را برای نادرست به کار ببرید.

α	β	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha \vee -\beta$	$\alpha \wedge -\beta$	$\alpha \wedge -\alpha \Rightarrow -\alpha$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1